QUANTITATIVE LINGUISTICS
Vol. 47

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen II

von
Gabriel Altmann
Peter Zörnig

Universitätsverlag Dr. N. Brockmeyer
Bochum 1992

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen/von Gabriel Altmann ; Peter Zörnig – Bochum : Brockmeyer.
Teil 1 verf. von Gabriel Altmann und Rolf Hammerl –
NE: Altmann, Gabriel; Hammerl, Rolf; Zörnig, Peter

3 (1992)
(Quantitative linguistics ; Vol. 47)
ISBN 3-88339-981-7
NE: GT

ISBN 3-88339-981-7

Uni-Tech-Center, Gebäude MC, 4630 Bochum 1
Gesamtherstellung: Druck Thiebes GmbH & Co. KG Hagen

Vorwort

Der vorliegende Band ist der zweite Teil von Altmann, G., Hammerl, R., *Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen I*. Bochum, Brockmeyer 1989. Die Numerierung der Kapitel wurde hier fortgesetzt. Verweise auf dieses Buch sind mit 'Bd. I' gekennzeichnet. Der Verweis 'SL' bezieht sich auf Altmann, G., *Statistik für Linguisten*. Bochum, Brockmeyer 1980.

Die Wahl der Verteilungen richtete sich zwar nach den aktuellen Bedürfnissen in der Linguistik, die Autoren hoffen aber, daß die behandelten Modelle für alle empirischen Wissenschaftler von Bedeutung sein können.

Das Buch entstand im Rahmen des Projekts 'Sprachliche Synergetik'. Die Autoren bedanken sich bei der Stiftung Volkswagenwerk, die dieses Projekt finanziell unterstützt hat, und bei Anja Hennern und Undine Roos, denen für das Layout dieses Buches unser verbindlicher Dank gehört.

P.Z.
G.A.

Inhalt

7. Die Pólya-Verteilung **1**

7.1 Ableitung 1
7.2 Charakteristika 10
7.3 Anpassung 15
7.4 Beziehungen zu anderen Verteilungen 21
7.5 Die inverse Pólya-Verteilung 32
Aufgaben 37

8. Die logarithmische Verteilung **41**

8.1 Ableitung 41
8.2 Charakteristika 44
8.3 Anpassung 49
8.4 Modifizierte logarithmische Verteilung 53
Aufgaben 59

9. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (WEF) .. **63**

9.1 Die Erzeugung von Wahrscheinlichkeiten 63
9.2 Faltung von Verteilungen 70
9.3 Zusammensetzung und Verallgemeinerung von Verteilungen 73

9.4 Konvergenz 84
Aufgaben 85

10. Zusammengesetzte und verallgemeinerte Verteilungen 88

10.1 Binomialverteilung 89
10.1.1. Binomialverteilung (n,p) $\bigwedge_{n}$ Binomialverteilung (m,p') 89
10.1.2. Binomialverteilung (ny,p) $\bigwedge_{y}$ Binomialverteilung (m,p') 90
10.1.3. Binomialverteilung (n,p) $\bigwedge_{n}$ Poisson-Verteilung (λ) ... 94
10.1.4. Binomialverteilung (ny,p) $\bigwedge_{y}$ Poisson-Verteilung (λ) .. 95
10.1.5. Binomialverteilung (n,p) $\bigvee$ Poisson-Verteilung (λ) ... 99
10.1.6. Binomialverteilung (n,p) $\bigwedge_{n}$ Geometrische Verteilung (p') 102
10.1.7. Binomialverteilung (ny,p) $\bigwedge_{y}$ Geometrische Verteilung (p') 103
10.1.8. Binomialverteilung (n,p) $\bigvee$ Geometrische Verteilung (p') 107
10.1.9. Binomialverteilung (n,p) $\bigwedge_{n}$ Logarithmische Verteilung (θ) 111
10.1.10. Binomialverteilung (ny,p) $\bigwedge_{y}$ Logarithmische Verteilung (θ) 113
10.1.11. Binomialverteilung (n,p) $\bigvee$ Logarithmische Verteilung (θ) 116

10.2. Poisson-Verteilungen
10.2.1. Poisson-Verteilung (λy) $\bigwedge_{y}$ negative Binomialverteilung (k,P) 119
10.2.2. Poisson-Verteilung (λ) $\bigvee$ negative Binomialverteilung (k,P) 121
10.2.3. Poisson-Verteilung (λ) $\bigwedge_{\lambda}$ Logarithmische Verteilung (q) 130
10.2.4. Poisson-Verteilung (λy) $\bigwedge_{y}$ Logarithmische Verteilung (q) 132
10.2.5. Poisson-Verteilung (λ) $\bigvee$ Logarithmische Verteilung (q) 133

10.3. Negative Binomialverteilungen
10.3.1. Negative Binomialverteilung (k,p) $\bigwedge_{k}$ Negative Binomialverteilung (m,p') 136
10.3.2. Negative Binomialverteilung (k,p) $\bigwedge_{k}$ Logarithmische Verteilung (θ) 138
10.3.3. Negative Binomialverteilung (ky,p) $\bigwedge_{y}$ Logarithmische Verteilung (θ) 139
10.3.4. Negative Binomialverteilung (k,p) $\bigvee$ Logarithmische Verteilung (θ) 142

10.4. Potenzreihen-Verteilungen (PRV) 143
Aufgaben 156

11. Die verallgemeinerte hypergeometrische Verteilung (VHG) 164

11.1. Einführung 164

11.2. Die Waring-Verteilung 167
11.3. Die Yule-Verteilung 175
Aufgaben 181

Lösungen **184**
Kapitel 7 184
Übungen 184
Aufgaben 191
Kapitel 8 199
Übungen 199
Aufgaben 203
Kapitel 9 210
Übungen 210
Aufgaben 216
Kapitel 10 228
Übungen 228
Aufgaben 237
Kapitel 11 252
Übungen 252
Aufgaben 253

Bibliographie 257
Sachregister 261

7. Die Pólya-Verteilung

7.1. Ableitung

Stellen wir uns wieder vor, daß sich in einer Urne N Zettel befinden. Auf M Zettel ($M \leq N$) ist ein Vokal, auf die restlichen ein Konsonant geschrieben. Wir führen das Experiment, das zu Formel (5.3) führte, in etwas modifizierter Form durch. Wir ziehen auch jetzt n Zettel und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, daß sich unter ihnen genau x Vokale befinden. Der Unterschied liegt darin, daß wir nach jedem Zug den Zettel zurücklegen und in die Urne noch s neue Zettel mit der gezogenen Phonemklasse (Vokal oder Konsonant) hineinlegen. In Einzelschritte zerlegt bedeutet dies folgendes:

Wir ziehen erst alle Vokale hintereinander und zwar im ersten Zug mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{M}{N}.$$

Den gezogenen Vokal legen wir zurück und dazu noch s weitere Zettel mit Vokalen. Beim zweiten Zug erhält man

$$\frac{M+s}{N+s}$$

als Wahrscheinlichkeit, einen Vokal zu ziehen. Wiederum legen wir den Vokal zurück und weitere s Vokale dazu, so daß im dritten Zug die Wahrscheinlichkeit, einen Vokal zu bekommen,

$$\frac{M+2s}{N+2s}$$

beträgt. So fahren wir fort, bis wir x mal einen Vokal gezogen haben und die Wahrscheinlichkeit beim x-ten Zug ist

$$\frac{M+(x-1)s}{N+(x-1)s}$$

Die Wahrscheinlichkeit, x-mal hintereinander einen Vokal zu ziehen, ist also

$$\frac{M}{N}\cdot\frac{M+s}{N+s}\cdot\frac{M+2s}{N+2s}\cdots\frac{M+(x-1)s}{N+(x-1)s}. \tag{7.1a}$$

Die $n-x$ Konsonanten ziehen wir hintereinander auf dieselbe Art mit jeweiligen Zugaben von s neuen Konsonanten, d.h. den ersten Konsonanten ziehen wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{N-M}{N+xs},$$

weil wir nach dem Zug des x-ten Vokal wieder s neue Zettel mit Vokalen in die Urne gelegt haben; den zweiten bekommen wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{N-M+s}{N+(x+1)s}$$

den dritten mit

$$\frac{N-M+2s}{N+(x+2)s}$$

usw. und den $(n-x)$-ten mit

$$\frac{N-M+(n-x-1)s}{N+(n-1)s}.$$

Das bedeutet, daß das anschließende Ziehen von $(n-x)$ Konsonanten mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{N-M}{N+xs}\cdot\frac{N-M+s}{N+(x+1)s}\cdots\frac{N-M+(n-x-1)s}{N+(n-1)s} \tag{7.1b}$$

erfolgt.

Bei der obigen Überlegung haben wir jedoch nur eine einzige Reihenfolge, in der man x Vokale und $n-x$ Konsonanten ziehen kann, berücksichtigt. Die Zahl aller möglichen Reihenfolgen ist bekanntlich

$$\binom{n}{x} \tag{7.1c}$$

so daß die Wahrscheinlichkeit, unter den gegebenen Bedingungen aus n Phonemen genau x Vokale zu ziehen, gleich

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\frac{M(M+s)(M+2s)\ldots[M+(x-1)s]}{N(N+s)(N+2s)\ldots(N+(n-1)s)}$$

$$\cdot(N-M)(N-M+s)\ldots[N-M+(n-x-1)s] \tag{7.2a}$$

$$=\frac{\binom{n}{x}\prod_{j=0}^{x-1}(M+js)\prod_{j=0}^{n-x-1}(N-M+js)}{\prod_{j=0}^{n-1}(n+js)} \qquad (x=0,1,2,\ldots,n) \tag{7.2b}$$

ist. Das erste Produkt im Zähler des letzten Bruches ist dabei im Fall $x=0$ als 1 zu interpretieren; entsprechendes gilt für das zweite Produkt für $x=n$. Der Ausdruck (7.2b) stellt die WF der Pólya-Verteilung dar.

Es ist leicht einzusehen, daß $P(X=x)$ immer positiv ist, da sowohl im Zähler als auch im Nenner positive Zahlen stehen. Etwas umständlicher ist es, $\sum_x P_x = 1$ zu zeigen. Wir wollen letzteres beweisen, indem wir uns der Einfachheit halber auf den Fall beschränken, daß $\frac{M}{s}$ und $\frac{N-M}{s}$ ganzzahlig sind. Dazu kürzen wir (7.2a) durch s und erhalten

$$f(x) = \binom{n}{x} \frac{\frac{M}{s}\left(\frac{M}{s}+1\right)\dots\left(\frac{M}{s}+x-1\right)}{\frac{N}{s}\left(\frac{N}{s}+1\right)\dots\left(\frac{N}{s}+n-1\right)}$$

$$\cdot \frac{N-M}{s}\left(\frac{N-M}{s}+1\right)\dots\left(\frac{N-M}{s}+n-x-1\right)$$

$$= \frac{\dfrac{\frac{M}{s}\left(\frac{M}{s}+1\right)\dots\left(\frac{M}{s}+x-1\right)}{x!}\cdot\dfrac{\left(\frac{N-M}{s}\right)\left(\frac{N-M}{s}+1\right)\dots\left(\frac{N-M}{s}+n-x-1\right)}{(n-x)!}}{\dfrac{\frac{N}{s}\left(\frac{N}{s}+1\right)\dots\left(\frac{N}{s}+n-1\right)}{n!}}$$

$$= \frac{\binom{\frac{M}{s}+x-1}{x}\binom{\frac{N-M}{s}+n-x-1}{n-x}}{\binom{\frac{N}{s}+n-1}{n}}. \tag{7.2c}$$

In § 5, insbesondere Aufgabe 5.4, haben wir gezeigt, daß die Summe der Ausdrücke im Zähler von (7.2c) für $x = 0$ bis $x = n$ genau dem Nenner entspricht. Es handelt sich hier um alle Kombinationen von n Elementen mit Wiederholung aus einer Menge von N/s Elementen (von denen $\frac{M}{s}$ von einer und $\frac{N-M}{s}$ von der anderen Sorte sind); d.h. man zieht entweder 0 Vokale und n Konsonanten auf

$$C'^{0}_{\frac{M}{s}} C'^{n}_{\frac{N-M}{s}} = \binom{\frac{M}{s}+0-1}{0}\binom{\frac{N-M}{s}+n-0-1}{n-0}$$

Weisen oder 1 Vokal und $n-1$ Konsonanten auf

$$C'^{1}_{\frac{M}{s}} C'^{n-1}_{\frac{N-M}{s}} = \binom{\frac{M}{s}+1-1}{1}\binom{\frac{N-M}{s}+n-1-1}{n-1}$$

Weisen usw. bis zu n Vokalen und keinem Konsonanten auf

$$C'^{n}_{\frac{M}{s}} C'^{0}_{\frac{N-M}{s}} = \binom{\frac{M}{s}+n-1}{n}\binom{\frac{N-M}{s}+n-n-1}{n-n}$$

Weisen, was zusammen

$$\sum_{x=0}^{n} C'^{x}_{\frac{M}{s}} C'^{n-x}_{\frac{N-M}{s}} = \binom{\frac{N}{s}+n-1}{n}$$

Möglichkeiten ergibt. Daraus folgt $\sum_x f(x) = 1$, wenn man beide Seiten der letzten Gleichung durch

$$\binom{\frac{N}{s}+n-1}{n}$$

dividiert.

Wendet man die Beziehung (4.3) an, so kann man (7.2c) auch in der Form

$$P_x = \frac{\binom{-\frac{M}{s}}{x}\binom{-\frac{N-M}{s}}{n-x}}{\binom{-\frac{N}{s}}{n}}. \tag{7.2d}$$

darstellen.

Beispiel 7.1.1. Man berechne P_0, P_1 und P_2 einer Pólya-Verteilung mit den Parametern $N = 6$, $M = 4$, $n = 3$, $s = 2$.

Lösung: Laut (7.2b) ist

$$P_0 = \binom{n}{0}\frac{(N-M)(N-M+s)(N-M+2s)}{N(N+s)(N+2s)}$$

$$= 1 \cdot \frac{(6-4)(6-4+2)(6-4+4)}{6(6+2)(6+4)} = \frac{1}{10}.$$

$$P_1 = \binom{n}{1}\frac{M(N-M)(N-M+s)}{N(N+s)(N+2s)} = 3 \cdot \frac{4(6-4)(6-4+2)}{6(6+2)(6+4)} = \frac{1}{5}$$

$$P_2 = \binom{n}{2}\frac{M(M+s)(N-M)}{N(N+s)(N+2s)} = 3 \cdot \frac{4(4+2)(6-4)}{6(6+2)(6+4)} = \frac{3}{10}. \bullet$$

Beispiel 7.1.2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß man unter den Bedingungen, die zu der Pólya-Verteilung führen, im zweiten Zug einen Vokal zieht (a) allgemein, (b) für $N = 6$, $M = 3$?

Lösung: (a) Es gibt zwei mögliche Sequenzen: VV und KV mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(VV) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M+s}{N+s},$$

$$P(KV) = \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N+s},$$

woraus

$$P(VV) + P(KV) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M+s}{N+s} + \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N+s} = \frac{M}{N}$$

folgt.
Induktiv kann man dann zeigen, daß für einen beliebigen Zug, die Wahrscheinlichkeit, einen Vokal zu ziehen, gleich M/N ist.

(b)

$$P(.V) = 3/6 = 0,5. \bullet$$

Eine **Rekursionsformel** für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ergibt sich aus (vgl. 7.2a)

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{\binom{n}{x+1}\frac{M(M+s)\dots(M+xs)}{N(N+s)\dots[N+(n-1)s]}}{\binom{n}{x}\frac{M(M+s)\dots[M+(x-1)s]}{N(N+s)\dots[N+(n-1)s]}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(N-M)(N-M+s)\dots[N-M+(n-x-2)s]}{(N-M)(N-M+s)\dots[N-M+(n-x-1)s]}$$

$$= \frac{(n-x)(M+xs)}{(x+1)[N-M+(n-x-1)s]}$$

zu

$$P_{x+1} = \frac{(n-x)(M+xs)}{(x+1)[N-M+(n-x-1)s]} P_x \,. \qquad (7.3)$$

Beispiel 7.1.3. Man berechne P_1 und P_2 aus dem Beispiel 7.1.1 mit Hilfe von (7.3).

Lösung:

$$P_1 = \frac{(3-0)(4+0)}{(0+1)[6-4+(3-0-1)2]} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P_2 = \frac{(3-1)(4+2)}{(1+1)[6-4+(3-1-1)2]} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

wie oben. •

Man pflegt die Pólya-Verteilung meistens etwas umgeformt darzustellen. Wir kürzen (7.2a) durch N, so daß sich

$$f(x) = \binom{n}{x} \frac{\frac{M}{N}\left(\frac{M}{N}+\frac{s}{N}\right)\cdots\left[\frac{M}{N}+\frac{(x-1)s}{N}\right]}{\frac{N}{N}\left(\frac{N}{N}+\frac{s}{N}\right)\left(\frac{N}{N}+\frac{2s}{N}\right)\cdots\left[\frac{N}{N}+\frac{(n-1)s}{N}\right]}$$

$$\cdot\frac{N-M}{N}\left(\frac{N-M}{N}+\frac{s}{N}\right)\cdots\left[\frac{N-M}{N}+\frac{(n-x-1)s}{N}\right]$$

ergibt und setzen

$$p=\frac{M}{N};\quad q=\frac{N-M}{N};\quad a=\frac{s}{N}, \tag{7.4}$$

woraus

$$f(x)=\binom{n}{x}\frac{p(p+a)(p+2a)\ldots[p+(x-1)a]}{1(1+a)(1+2a)\ldots[1+(n-1)a]}$$

$$\cdot\, q(q+a)(q+2a)\ldots[q+(n-x-1)a] \tag{7.5a}$$

$$=\frac{\binom{n}{x}\prod\limits_{j=0}^{x-1}(p+ja)\prod\limits_{j=0}^{n-x-1}(q+ja)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(1+ja)}\qquad (x=0,1,2,\ldots,n) \tag{7.5b}$$

folgt (vgl. die Bemerkung nach (7.2b)).

Durch einfache Umformungen von (7.5a) erhält man

$$f(x)=\frac{\dfrac{\frac{p}{a}\left(\frac{p}{a}+1\right)\left(\frac{p}{a}+2\right)\cdots\left(\frac{p}{a}+x-1\right)\frac{q}{a}\left(\frac{q}{a}+1\right)\left(\frac{q}{a}+2\right)\cdots\left(\frac{q}{a}+n-x-1\right)}{x!(n-x)!}}{\dfrac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{a}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{a}+n-1\right)}{n!}}$$

$$=\frac{\binom{\frac{p}{a}+x-1}{x}\binom{\frac{q}{a}+n-x-1}{n-x}}{\binom{\frac{1}{a}+n-1}{n}}\qquad (x=0,1,\ldots,n) \tag{7.5c}$$

Wendet man auf (7.5c) die Beziehung (4.3) an, so bekommt man auch

$$f(x)=\frac{\binom{-\frac{p}{a}}{x}\binom{-\frac{q}{a}}{n-x}}{\binom{-\frac{1}{a}}{n}},\quad (x=0,1,\ldots,n). \tag{7.5d}$$

Die Rekursionsformel lautet jetzt

$$P_{x+1}=\frac{(n-x)(p+xa)}{(x+1)\left[1-p+(n-x-1)a\right]}P_x. \tag{7.6}$$

Übung 7.1.1. Man berechne P_0, P_1 und P_2 einer Pólya-Verteilung mit $N=10$, $M=5$, $n=4$, $s=3$.

Übung 7.1.2. Man zeige, daß man (7.5d) auch aus (7.2d) durch die Substitution (7.4) bekommen kann.

Übung 7.1.3. Man zeige, daß der Modus x_M der Pólya-Verteilung durch

$$\frac{(M-s)(n+1)}{N-2s}-1\le x_M\le\frac{(M-s)(n+1)}{N-2s} \tag{7.7}$$

gegeben ist.

Übung 7.1.4. Man leite die Rekursionsformel (7.6) aus (7.3) durch die Substitution (7.4) ab.

7.2. Charakteristika

Für die Berechnung der **faktoriellen Momente** benutzen wir die Formel (7.5d). So ergibt sich

$$\mu_{(1)} = \sum_{x=1}^{n} \frac{x\binom{-\frac{p}{a}}{x}\binom{-\frac{q}{a}}{n-x}}{\binom{-\frac{1}{a}}{n}} = \frac{-\frac{p}{a}\cdot n}{-\frac{1}{a}} \sum_{x=1}^{n} \frac{\binom{-\frac{p}{a}-1}{x-1}\binom{-\frac{q}{a}}{n-x}}{\binom{-\frac{1}{a}-1}{n-1}}.$$

Durch Substitution von $x-1=y$, $n-1=z$, $-\frac{p}{a}-1=-s$, $-\frac{1}{a}-1=-t$ läßt sich die letzte Summe in eine zu (7.2d) analoge Form überführen. Sie hat also den Wert 1. Somit gilt

$$\mu_{(1)} = np \tag{7.8}$$

Für $\mu_{(2)}$ ergibt sich auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned}\mu_{(2)} &= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{\binom{-\frac{p}{a}}{x}\binom{-\frac{q}{a}}{n-x}}{\binom{-\frac{1}{a}}{n}} \\ &= \frac{-\frac{p}{a}\left(-\frac{p}{a}-1\right)n(n-1)}{-\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}-1\right)} \sum_{x=2}^{n} \frac{\binom{-\frac{p}{a}-2}{x-2}\binom{-\frac{q}{a}}{n-x}}{\binom{-\frac{1}{a}-2}{n-2}} \\ &= \frac{p(p+a)\,n(n-1)}{1+a},\end{aligned} \tag{7.9}$$

da die letzte Summe ebenfalls den Wert 1 hat.

Entsprechend erhält man

$$\begin{aligned}\mu_{(3)} &= \frac{-\frac{p}{a}\left(-\frac{p}{a}-1\right)\left(-\frac{p}{a}-2\right)n(n-1)(n-2)}{-\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}-1\right)\left(-\frac{1}{a}-2\right)} \\ &= \frac{p(p+a)(p+2a)n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)}\end{aligned} \tag{7.10}$$

und schließlich

$$\mu_{(4)} = \frac{p(p+a)(p+2a)(p+3a)n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1+a)(1+2a)(1+3a)}. \tag{7.11}$$

Allgemein gilt

$$\mu_{(r)} = \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(p+ia)\prod_{i=0}^{r-1}(n-i)}{\prod_{i=0}^{r-1}(1+ia)}. \tag{7.12}$$

Beispiel 7.2.1. Man berechne $\mu_{(1)}$ und $\mu_{(2)}$ einer Pólya-Verteilung mit den Parametern $N=8$, $M=3$, $n=2$, $s=1$.

Lösung: Laut (7.4) ist

$$p = \frac{M}{N} = \frac{3}{8}$$

$$a = \frac{s}{N} = \frac{1}{8}$$

daher ist

$$\mu_{(1)} = np = 2\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\mu_{(2)} = \frac{\frac{3}{8}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)2(2-1)}{1+\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}. \bullet$$

Nachdem wir die Stirling-Zahlen zweiter Art kennengelernt haben, können wir die Anfangsmomente mit Hilfe der Formel

$$\mu_r' = \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)\mu_{(k)} = \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)\left[\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p+ia)\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(1+ia)}\right] \tag{7.13}$$

darstellen (vgl. (6.30)).

Beispiel 7.2.2. Man berechne μ_2' und μ_3' mit Hilfe von (7.13).

Lösung:

$$\mu_2' = Z(2,1)\left[\frac{pn}{1}\right] + Z(2,2)\left[\frac{p(p+a)\,n(n-1)}{1(1+a)}\right]$$

$$= np + \frac{p(p+a)\,n(n-1)}{1+a} \tag{7.14}$$

$$\mu_3' = Z(3,1)\left[\frac{pn}{1}\right] + Z(3,2)\left[\frac{p(p+a)\,n(n-1)}{1(1+a)}\right] +$$

$$+ Z(3,3)\left[\frac{p(p+a)\,(p+2a)\,n(n-1)(n-2)}{1(1+a)(1+2a)}\right]$$

$$= np + \frac{3p(p+a)\,n(n-1)}{1+a} + \frac{p(p+a)\,(p+2a)\,n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)}. \tag{7.15}$$

Entsprechend gilt

$$\mu_4' = np + \frac{7p(p+a)n(n-1)}{1+a} + \frac{6p(p+a)(p+2a)n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)} +$$

$$+ \frac{p(p+a)(p+2a)(p+3a)n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1+a)(1+2a)(1+3a)}. \bullet \tag{7.16}$$

Aus der Formel (7.13) leiten wir wieder leicht die Formel für **Zentralmomente** ab, denn nach (SL 5.20) ergibt sich

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(-\mu_1'\right)^{r-k}\mu_k'$$

$$= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-np)^{r-k}\left\{\sum_{j=1}^{k} Z(k,j)\left[\frac{\prod_{i=0}^{j-1}(p+ia)\prod_{i=0}^{j-1}(n-i)}{\prod_{i=0}^{j-1}(1+ia)}\right]\right\}, \tag{7.17}$$

wobei die Summe in den geschweiften Klammern im Fall $k = 0$ als 1 zu interpretieren ist.

Beispiel 7.2.3. Man berechne μ_2 einer Pólya-Verteilung (a) allgemein und (b) wenn die Parameter $a = 1/2$, $p = 1/2$, $n = 3$ sind.

Lösung:
(a)

$$\mu_2 = \binom{2}{0}(-np)^{2-0}\{1\} + \binom{2}{1}(-np)^{2-1}\left\{1\left[\frac{np}{1}\right]\right\}$$

$$+\binom{2}{2}(-np)^{2-2}\left\{1\left[\frac{np}{1}+\frac{p(p+a)\,n(n-1)}{1+a}\right]\right\} \tag{7.18}$$

$$= n^2p^2 - 2n^2p^2 + np + \frac{p(p+a)\,n(n-1)}{1+a}$$

$$= \frac{npq\,(1+na)}{1+a}.$$

(b)

$$\mu_2 = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(1+3\frac{1}{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{4}. \bullet$$

Übung 7.2.1. Man berechne μ_1' und μ_2 einer Pólya-Verteilung mit den Parametern $p = \frac{3}{4}$, $a = \frac{1}{5}$, $n = 3$.

Übung 7.2.2. Man versuche zu zeigen, daß für die Pólya-Verteilung

$$\mu_3 = \frac{npq(q-p)(1+na)(1+2na)}{(1+a)(1+2a)}, \tag{7.19}$$

$$\mu_4 = \frac{npq(1+na)\{(1+2na)(1+3na)(1-3pq)+(n-1)[a+3pq(1+na)]\}}{(1+a)(1+2a)(1+3a)}, \tag{7.20}$$

$$\gamma_1 = \frac{(q-p)(1+2na)\sqrt{1+a}}{(1+2a)\sqrt{npq(1+na)}}, \tag{7.21}$$

$$\gamma_2 = \frac{(1+a)\,\{(1+2na)(1+3na)(1-3pq)+(n-1)\,[a+3pq(1+na)]\}}{npq(1+2a)(1+3a)(1+na)} - 3 \tag{7.22}$$

gilt.

7.3. Anpassung

(a) Bei der Anpassung an die Daten ergeben sich die gleichen Schwierigkeiten wie bei der Anpassung der hypergeometrischen Verteilung. Die Zahl der Parameter läßt sich mit Hilfe von (7.5) auf drei reduzieren (n, p, a). Wenn man n als den größten Wert ansetzt, den die Zufallsvariable annimmt, so sind nur noch zwei Parameter zu schätzen, nämlich p und a.

Aus der Tatsache, daß

$$\mu_1' = np$$

und

$$\mu_2 = \frac{npq(1+na)}{1+a}$$

gilt, folgt

$$\hat{n} = x_{\max}$$

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{\hat{n}}. \bullet \tag{7.23a}$$

Löst man die Formel für μ_2 nach a auf (durch Substitution von $a + 1 = \tilde{a}$ und anschließendes Kürzen durch $\tilde{a}$), so ergibt sich ferner

$$\hat{a} = \frac{\hat{n}\hat{p}\hat{q} - s^2}{s^2 - \hat{n}^2\hat{p}\hat{q}}. \tag{7.23b}$$

Bei der Verschiebung der Verteilung um 1 nach rechts ergeben sich rein formal keine Schwierigkeiten. Die Zufallsvariable läuft jetzt von 1 bis $n+1$, der Mittelwert erhöht sich um 1 und die Varianz bleibt unverändert. Entsprechend (7.23) ergibt sich aus

$$\mu_1' = np + 1$$
$$\mu_2 = \frac{npq(1+na)}{1+a}$$

die Schätzung

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}-1}{\hat{n}}$$
$$\hat{a} = \frac{\hat{n}\hat{p}\hat{q} - s^2}{s^2 - \hat{n}^2\hat{p}\hat{q}}, \tag{7.24}$$

wobei $\hat{n}$ jetzt der zweitgrößte Wert ist, den X annehmen kann, d.h.

$$\hat{n} = x_{\max} - 1.$$

Die Größe a braucht keineswegs positiv zu sein. Es genügt, wenn sie die Bedingung $\min\{p,q\} + (n-1)a > 0$ erfüllt, da dann offensichtlich $f(x) > 0$ ist (vgl. (7.5a)). Die **Rekursionsformel** der 1-verschobenen Pólya-Verteilung lautet jetzt (vgl. (7.6)):

$$P_{x+1} = \frac{(n-x+1)\,[p+(x-1)a]}{x\,[q+(n-x)a]}P_x$$

mit

$$P_1 = \frac{q(q+a)\ldots[q+(n-1)a]}{(1+a)(1+2a)\ldots[1+(n-1)a]}. \tag{7.25}$$

Beispiel 7.3.1. Denes (1964) hat unter anderem die Silbenlänge der Wörter ohne Betonung im gesprochenen Englisch untersucht und die folgende Verteilung festgestellt

x Silben	f_x Wörter
1	11397
2	839
3	100
4	10
5	4
	12350

Wir untersuchen, ob man an diese Daten die 1-verschobene Pólya-Verteilung anpassen kann.

Lösung: Aus den Daten folgt

$$\bar{x} = 1.0879$$
$$s^2 = 0.1051$$
$$n = 4$$

woraus sich nach (7.24)

$$\hat{p} = \frac{1.0879-1}{4} = 0.0220,$$
$$\hat{q} = 0.9780,$$
$$\hat{a} \doteq \frac{4(0.0220)(0.9780) - 0.1051}{0.1051 - 16(0.0220)0.9780} = 0.08.$$

ergibt. Daraus folgt nach (7.25)

$$NP_1 = 12350 \cdot \frac{0.978(0.978+0.08)\,[0.978+2(0.08)]\,[0.978+3(0.08)]}{(1+0.08)\,[1+2(0.08)]\,[1+3(0.08)]}$$

$$= 11401.91,$$

$$NP_2 = \frac{(4-1+1)\,[0.022+0(0.08)]}{1\,[0.978+(4-1)0.08]} \cdot 11401.91 = 823.78,$$

$$NP_3 = \frac{(4-2+1)\,[0.022+1(0.08)]}{2\,[0.978+(4-2)0.08]} \cdot 823.78 = 110.75,$$

$$NP_4 = \frac{(4-3+1)\,[0.022+2(0.08)]}{3\,[0.978+(4-3)0.08]} \cdot 110.75 = 12.70,$$

$$NP_5 = \frac{(4-4+1)\,[0.022+3(0.08)]}{4\,[0.978+(4-4)0.08]} \cdot 12.70 = 0.85.$$

Vergleicht man diese Werte mit den beobachteten in der Tabelle, so sieht man, daß die Anpassung ziemlich gut ist.•

(b) Die Ableitung einer anderen Schätzung ist komplizierter; wir stellen sie daher detaillierter dar. [Der Leser hat bereits eine ähnliche bei der hypergeometrischen Verteilung kennengelernt]. Wir betrachten die ersten drei faktoriellen Momente

$$\mu_{(1)} = np$$

$$\mu_{(2)} = \frac{p(p+a)n(n-1)}{1+a},$$

$$\mu_{(3)} = \frac{p(p+a)(p+2a)n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)}$$

und bilden folgende Quotienten:

$$Q_1 = \mu_{(1)} = np \tag{7.26a}$$

$$Q_2 = \frac{\mu_{(2)}}{\mu_{(1)}} = \frac{(p+a)(n-1)}{1+a} \tag{7.26b}$$

$$Q_3 = \frac{\mu_{(3)}}{\mu_{(2)}} = \frac{(p+2a)(n-2)}{1+2a} \tag{7.26c}$$

Aus (7.26a) folgt

$$p = \frac{Q_1}{n}.$$

Aus (7.26b) folgt

$$a = \frac{Q_1\left(1-\frac{1}{n}\right) - Q_2}{Q_2 - n + 1}.$$

(vgl. die Bermerkung nach (7.23a)). Um n mit Hilfe der Quotienten darstellen zu können, lösen wir (7.26c) nach n auf und setzen für p und a die obigen Terme ein. Nach einigen Umformungen ergibt sich daraus:

$$n^2\,(-Q_3 + 2Q_2 - Q_1) + n\,(Q_3 - Q_3Q_2 + 2Q_3Q_1 - 4Q_2 - Q_2Q_1 + 3Q_1) \\ - 2Q_1\,(Q_3 - Q_2 + 1) = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, die sich leicht auflösen läßt, wenn man den Koeffizienten von n^2 mit A, den Koeffizienten von n mit B und die Größe $-2Q_1(Q_3 - Q_2 + 1)$ mit C bezeichnet.

Um die Parameter zu schätzen, sind also der Reihe nach folgende Ausdrücke zu berechnen:

$$\hat{Q}_1 = \bar{x}$$

$$\hat{Q}_2 = \frac{m_{(2)}}{\bar{x}}$$

$$\hat{Q}_3 = \frac{m_{(3)}}{m_{(2)}}$$

$$A = -\hat{Q}_3 + 2\hat{Q}_2 - \hat{Q}_1$$

$$B = \hat{Q}_3 - \hat{Q}_3\hat{Q}_2 + 2\hat{Q}_3\hat{Q}_1 - 4\hat{Q}_2 - \hat{Q}_2\hat{Q}_1 + 3\hat{Q}_1$$

$$C = -2\hat{Q}_1\left(\hat{Q}_3 - \hat{Q}_2 + 1\right)$$

$$\hat{n}_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{7.27a}$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q}_1\left(1 - \frac{1}{\hat{n}}\right) - \hat{Q}_2}{\hat{Q}_2 - \hat{n} + 1} \tag{7.27b}$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{Q}_1}{\hat{n}} \tag{7.27c}$$

Übung 7.3.1. Man versuche, die Pólya-Verteilung an die Daten von Tuldava (1974) aus der Übung 4.3.3 anzupassen. [Man benutze die Schätzungen (7.24)]:

x	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
f_x	139	42	24	5	9	7	5	231

[$\bar{x} = 1.891775$; $s^2 = 2.166497$.]

Übung 7.3.2. (a) Man leite die ersten drei faktoriellen Momente der 1-verschobenen Pólya-Verteilung ab.

(b) Mit $\mu_{(r)0}$ seien die faktoriellen Momente der nicht-verschobenen [(7.8) bis (7.12)] und mit $\mu_{(r)1}$ die der 1-verschobenen Pólya-Verteilung bezeichnet. Man zeige

$$\mu_{(r)1} = \mu_{(r)0} + r\mu_{(r-1)o}.$$

[Es genügt zu zeigen, daß

$$x(x-1)\dots(x-r+1) = (x-1)(x-2)\dots(x-r)+r(x-1)(x-2)\dots(x-r+1),$$

woraus nach Einsetzung das Resultat folgt.]

(c) Für die 1-verschobenen Pólya-Verteilung seien die folgenden Quotienten definiert:

$$Q_1 = \mu_{(1)} - 1$$

$$Q_2 = \frac{\mu_{(2)} - 2Q_1}{Q_1}, \tag{7.28}$$

$$Q_3 = \frac{\mu_{(3)} - 3Q_2Q_1}{Q_2Q_1}$$

Man zeige analog zur obigen Entwicklung, daß sich auch für diese Verteilung die Schätzungen (7.27) herleiten lasssen.

(d) Man benutze die Schätzungen (7.27) für die Anpassung der Pólya-Verteilung an die Daten im Beispiel 7.3.1.

7.4. Beziehungen zu anderen Verteilungen

Die Pólya-Verteilung hat mehrere Spezialfälle.

(a) Setzt man in Formel (7.2a)

$$s = 0,$$

so ergibt sich

$$f(x) = \binom{n}{x} \frac{M \cdot M \cdot \ldots \cdot M(N-M)(N-M)\ldots(N-M)}{N \cdot N \cdot \ldots \cdot N},$$

wobei die Faktoren $M, (N-M)$ und N x-mal, $(n-x)$-mal bzw. n-mal auftreten.

Für

$$p = \frac{M}{N}$$

ergibt sich daraus

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

d.h. die *Binomialverteilung* ist der Spezialfall der Pólya-Verteilung für $s = 0$.

Beispiel 7.4.1. Man zeige durch Einsetzen von $s = 0$, daß der Modus der Pólya-Verteilung (7.7) zum Modus der Binomialverteilung wird.

Lösung: Für den Modus der Pólya-Verteilung gilt

$$\frac{(M-s)(n+1)}{N-2s} - 1 \leq x_M \leq \frac{(M-s)(n+1)}{N-2s}.$$

Für $s = 0$ erhält man

$$\frac{M(n+1)}{N} - 1 \leq x_M \leq \frac{M(n+1)}{N}$$

und schließlich

$$p(n+1) - 1 \leq x_M \leq p(n+1),$$

was der Modus der Binomialverteilung ist.•

Die Pólya-Verteilung konvergiert auch gegen die Binomialverteilung für

$$N \to \infty$$
$$M \to \infty$$

und

$$\frac{M}{N} = p.$$

In diesem Fall ist

$$\lim_{N\to\infty} a = \lim_{N\to\infty} \frac{s}{N} = 0$$

(vgl. (7.4)). Setzt man $a = 0$ in (7.5a), so ergibt sich ebenfalls die Binomialverteilung.

(b) Setzt man in (7.2a)

$$s = -1$$

ein, so ergibt sich

$$f(x) = \binom{n}{x} \frac{M(M-1)(M-2)\ldots(M-x+1)}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$$
$$\cdot (N-M)(N-M-1)\ldots(N-M-n+x+1)$$
$$= \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

was die WF der *hypergeometrischen Verteilung* darstellt.

Beispiel 7.4.2. Man zeige, daß μ_2 der Pólya-Verteilung zu μ_2 der hypergeometrischen Verteilung wird, wenn man $s = -1$ setzt.

Lösung:

$$\mu_2 = npq\frac{(1+na)}{1+a} = npq\frac{(1+n\frac{s}{N})}{(1+\frac{s}{N})} = npq\frac{(N+ns)}{(N+s)}.$$

Setzt man jetzt $s = -1$ ein, so bekommt man

$$\mu_2 = npq\frac{(N-n)}{(N-1)} \quad \text{(vgl. 5.9).} \bullet$$

(c) Wenn man in (7.2d)

$$s = 1$$

setzt, ergibt sich

$$f(x) = \frac{\binom{-M}{x}\binom{-N+M}{n-x}}{\binom{-N}{n}} \quad \text{für} \quad x = 0, 1, \ldots, n, \tag{7.29}$$

wodurch die *negative hypergeometrische Verteilung* dargestellt wird (vgl. (5.3)).

Beispiel 7.4.3. Man zeige, daß die negative hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M, n mit der inversen hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern $M+1$, k, $N-M$ identisch ist.

Lösung: In der negativen hypergeometrischen Verteilung ersetze man

N durch $M+1$
M durch k
n durch $N-M$

d.h.

$$f(x) = \frac{\dfrac{(M+x-1)!}{x!(M-1)!} \cdot \dfrac{(N-M+n-x-1)!}{(n-x)!(N-M-1)!}}{\dfrac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}}$$

(vgl. (4.3)) wird zu

$$\frac{\dfrac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!} \cdot \dfrac{(M+1-k+N-M-x-1)!}{(N-M-x)!(M+1-k-1)!}}{\dfrac{(M+1+N-M-1)!}{(N-M)!(M+1-1)!}} =$$

$$\frac{\dfrac{M!}{(k-1)!(M-k)!} \cdot \dfrac{(N-M)!}{x!(N-M-x)!}}{\dfrac{N!}{(k+x-1)!(N-k-x)!}}$$

Letzteres entspricht (5.19a).$\bullet$

(d) Setzt man in Formel (7.2a)

$$M = N - M = s,$$

woraus

$$N = 2s$$

folgt, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{n}{x}\frac{[s(2s)(3s)\ldots(xs)]\,(s)(2s)(3s)\ldots[(n-x)s]}{(2s)(3s)\ldots(ns)\,[(n+1)s]} \\ &= \binom{n}{x}\frac{s^x x! s^{n-x}(n-x)!}{s^n n!(n+1)} = \frac{1}{n+1} \quad \text{für} \quad x = 0, 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{7.30}$$

was die *diskrete Rechteckverteilung* darstellt.

Beispiel 7.4.4. Man berechne μ_2' der diskreten Rechteckverteilung direkt aus (7.30) und dann aus der Pólya-Verteilung.

Lösung:

$$\mu_2' = \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6}.$$

Für die Pólya-Verteilung gilt nach (7.14):

$$\mu_2' = np + \frac{p(p+a)n(n-1)}{1+a} = \frac{nM}{N} + \frac{\frac{M}{N}\left(\frac{M}{N}+\frac{s}{N}\right)n(n-1)}{1+\frac{s}{N}} =$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)n(n-1)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{n(2n+1)}{6}. \bullet$$

(e) Wir zeigen noch die Konvergenz der Pólya-Verteilung gegen zwei andere Verteilungen. Für

$$\begin{aligned} n &\to \infty, \\ p &\to 0, \\ a &\to 0, \end{aligned} \tag{7.31}$$

und

$$\begin{aligned} np &= \lambda, \\ na &= \theta, \end{aligned}$$

konvergiert sie gegen die *negative Binomialverteilung*. Zum Beweis setzen wir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P_x &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{P_x}{P_{x-1}} \cdot \frac{P_{x-1}}{P_{x-2}} \cdots \frac{P_1}{P_0} \cdot P_0\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{P_x}{P_{x-1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{P_{x-1}}{P_{x-2}} \cdots \lim_{n\to\infty} \frac{P_1}{P_0} \cdot \lim_{n\to\infty} P_0. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Es genügt somit, $\lim\limits_{n\to\infty} P_x/P_{x-1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} P_0$ zu berechnen.

Aus (7.6) folgt

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{(n-x)(p+xa)}{(x+1)\,[1-p+(n-x-1)a]} = \frac{(n-x)\left(\frac{p}{a}+x\right)}{(x+1)\left[\frac{q}{a}+(n-x-1)\right]}.$$

Wegen (7.31) gilt ferner

$$\begin{aligned} \frac{p}{a} &= \frac{\lambda}{\theta} \\ \frac{q}{a} &= \frac{n-\lambda}{\theta}, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\theta}+x\right)}{x+1} \cdot \frac{n-x}{\frac{n-\lambda}{\theta}+n-x-1}.$$

ergibt.

Kürzt man den zweiten Bruch durch n, so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} P_{x+1}/P_x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\lambda}{\theta}+x}{x+1}\right) \frac{n-x}{\frac{n-\lambda}{\theta}+n-x-1} = \frac{\frac{\lambda}{\theta}+x}{x+1} \cdot \frac{\theta}{1+\theta},$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} P_x/P_{x-1} = \frac{\frac{\lambda}{\theta}+x-1}{x}\cdot\frac{\theta}{1+\theta} = \frac{\frac{\lambda}{\theta}+x-1}{x}\cdot q'$$

mit $q' = \dfrac{\theta}{1+\theta}$. Setzt man diesen Ausdruck in (7.32) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P_x &= \left(\frac{\frac{\lambda}{\theta}+x-1}{x}\cdot q'\right)\left(\frac{\frac{\lambda}{\theta}+x-2}{x-1}\cdot q'\right)\cdots\left(\frac{\frac{\lambda}{\theta}}{1}\cdot q'\right)\lim_{n\to\infty} P_0 \\ &= \binom{\frac{\lambda}{\theta}+x-1}{x} q'^x \lim_{n\to\infty} P_0.\end{aligned} \tag{7.33}$$

Für P_0 gilt

$$P_0 = \frac{q(q+a)(q+2a)\ldots[q+(n-1)a]}{1(1+a)(1+2a)\ldots[1+(n-1)a]}.$$

Da nach (7.31) $p = \lambda/n$, $q = 1-\lambda/n$, $a = \theta/n$ gilt, folgt daraus

$$P_0 = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\theta}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{2\theta}{n}\right)\cdots\left[1-\frac{\lambda}{n}+(n-1)\frac{\theta}{n}\right]}{1\left(1+\frac{\theta}{n}\right)\left(1+\frac{2\theta}{n}\right)\cdots\left[1+\frac{(n-1)\theta}{n}\right]}.$$

Dividiert man jeden Faktor im Zähler durch den an entsprechender Position stehenden Faktor im Nenner, so ergibt sich

$$\begin{aligned}P_0 &= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda/n}{1+\theta/n}\right)\left(1-\frac{\lambda/n}{1+2\theta/n}\right)\cdots\left[1-\frac{\lambda/n}{1+(n-1)\theta/n}\right] \\ &= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n+\theta}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n+2\theta}\right)\cdots\left[1-\frac{\lambda}{n+(n-1)\theta}\right].\end{aligned}$$

Logarithmieren beider Seiten ergibt dann

$$\ln P_0 = \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{\lambda}{n+\theta}\right) + \ldots + \ln\left[1-\frac{\lambda}{n+(n-1)\theta}\right].$$

Entwickelt man alle Summanden in eine Taylorreihe der Form

$$\ln(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \ldots$$

(vgl. SL: (5.32)), so ergibt sich nach Umordnung der Summanden:

$$\ln P_0 = -\sum_{x=0}^{n-1}\frac{\lambda}{n+x\theta} - \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{n+x\theta}\right)^2 - \frac{1}{3}\sum_{x=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{n+x\theta}\right)^3 - \ldots$$

Wegen

$$0 \le \frac{1}{r}\sum_{x=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{n+x\theta}\right)^r \le \frac{1}{r}n\left(\frac{\lambda}{n}\right)^r = \frac{\lambda^r}{r}\frac{1}{n^{r-1}}$$

für $r \geq 2$ konvergieren alle Summen der rechten Seite, außer der ersten, für $n \to \infty$ gegen 0.

Somit gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln P_0 &= -\lim_{n\to\infty}\sum_{x=0}^{n-1}\frac{\lambda}{n+x\theta} \\ &= -\frac{\lambda}{\theta}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta}{n}\frac{1}{1+\frac{(k-1)\theta}{n}}.\end{aligned}$$

Die Summanden der letzten Summe lassen sich als Flächeninhalt der Rechtecke mit der Basis $\dfrac{\theta}{n}$ und der Höhe

$$\frac{1}{1+\frac{(k-1)\theta}{n}}$$

interpretieren, die nebeneinander auf der Abzisse von 0 bis θ aufgestellt sind. Für $n \to \infty$ bilden die linken oberen Ecken dieser Rechtecke die Kurve

$$y = \frac{1}{1+x}.$$

Aus der obigen Beziehung folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} \ln P_0 = -\frac{\lambda}{\theta}\int_0^\theta \frac{1}{1+x}dx = -\frac{\lambda}{\theta}\ln(1+\theta),$$

woraus sofort

$$\lim_{n\to\infty} P_0 = (1+\theta)^{-\lambda/\theta} \tag{7.34}$$

folgt. Setzt man dies in (7.33) ein, so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} P_x = \binom{\frac{\lambda}{\theta}+x-1}{x} q'^x p'^{\lambda/\theta}$$

($q' = \frac{\theta}{1+\theta}$, $p' = \frac{1}{1+\theta}$), worin man die WF der negativen Binomialverteilung erkennt. •

Beispiel 7.4.5. Man zeige, daß unter den Bedingungen (7.31) μ_2' der Pólya-Verteilung zu μ_2' der negativen Binomialverteilung wird.

Lösung: Aus

$$\begin{aligned}\mu_2' &= np + \frac{p(p+a)n(n-1)}{1+a}\\ &= \lambda + \frac{np(np+na)n(n-1)}{n(n+na)}\\ &= \lambda + \frac{\lambda(\lambda+\theta)(n-1)}{n+\theta}\end{aligned}$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty}\mu_2' = \lambda + \lambda(\lambda+\theta)\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+\theta} = \lambda+\lambda(\lambda+\theta).$$

Benutzt man die Beziehung $q' = \frac{\theta}{1+\theta}$, woraus $\theta = \frac{q'}{p'}$ folgt, so bekommt man

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\lambda}{\theta}\cdot\theta = \frac{\lambda}{\theta}\cdot\frac{q'}{p'} = kP,\\ \lambda(\lambda+\theta) &= \frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{\lambda}{\theta}+\frac{\theta}{\theta}\right)\theta^2 = k(k+1)P^2,\end{aligned}$$

so daß

$$\lambda + \lambda(\lambda+\theta) = kP + k(k+1)P^2$$

folgt (vgl. (4.11)).•

(f) Für

$$\begin{aligned} n &\to \infty,\\ p &\to 0,\\ a &\to 0,\\ na &\to 0,\\ np &= \lambda \end{aligned} \tag{7.35}$$

konvergiert die Pólya-Verteilung gegen die *Poisson-Verteilung*. Dieses Resultat ist schon aus Abschnitt 4.4 bekannt, wo gezeigt wurde, daß die negative Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung konvergiert. Der Leser soll jedoch diese Konvergenz direkt nachweisen (vgl. Aufgabe 7.13).

Beispiel 7.4.6. Man zeige, daß μ_2 der Pólya-Verteilung gegen μ_2 der Poisson-Verteilung konvergiert, wenn die Bedingungen (7.35) erfüllt sind.

Lösung:

$$\lim \mu_2 = \lim \frac{npq(1+na)}{1+a} = \lim \frac{\lambda\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)(1+na)}{1+a} = \lambda. \bullet$$

Übung 7.4.1. Man zeige, daß μ_2' der Binominalverteilung aus μ_2' der Pólya-Verteilung ableitbar ist, wenn $s = 0$ gilt.

Übung 7.4.2. Man zeige, daß μ_3' der hypergeometrischen Verteilung aus μ_3' der Pólya-Verteilung ableitbar ist, wenn $s = -1$ ist.

Übung 7.4.3. Man zeige, daß sich μ_3' der diskreten Rechteckverteilung aus μ_3' der Pólya-Verteilung ableiten läßt, wenn $M = N - M = s$ gilt.

7.5. Die inverse Pólya-Verteilung

Diese Verteilung entsteht durch dasselbe Experiment wie die übliche Pólya-Verteilung in §7.1. Die Frage ist jetzt, wie viele Züge notwendig sind, um genau k Vokale zu ziehen, wenn wir nach jedem Zug den Zettel zurücklegen und noch s Zettel mit gleichen Phonemen in die Urne legen. Die k Vokale und x Konsonanten können auf $\binom{k+x-1}{x}$ Weisen gezogen werden ($k + x = n$), weil der letzte Zettel einen Vokal enthalten muß (den k-ten); daher ist

$$P_x = \binom{k+x-1}{x} \frac{M(M+s)(M+2s)\dots[M+(k-1)s]}{N(N+s)(N+2s)\dots(N+(k+x-1)s)} \cdot (N-M)(N-M+s)\dots[N-M+(x-1)s] \tag{7.36}$$

Setzt man wie in (7.4)

$$p = \frac{M}{N}; \quad q = \frac{N-M}{N}; \quad a = \frac{s}{N},$$

so ergibt sich

$$P_x = \binom{k+x-1}{x} \frac{p(p+a)(p+2a)\dots[p+(k-1)a]q(q+a)\dots[q+(x-1)a]}{(1+a)(1+2a)\dots[1+(k+x-1)a]}. \tag{7.37}$$

Man sieht, daß die inverse Pólya-Verteilung zu der Pólya-Verteilung in derselben Beziehung steht, wie die negative Binomialverteilung zu der Binomialverteilung.

Man kann auch diese Verteilung mit Hilfe von Binomialkoeffizienten alternativ darstellen. Kürzt man (7.37) faktorweise durch a so ergibt sich

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!} \cdot \frac{\frac{p}{a}\left(\frac{p}{a}+1\right)\dots\left(\frac{p}{a}+k-1\right)\frac{q}{a}\left(\frac{q}{a}+1\right)\dots\left(\frac{q}{a}+x-1\right)}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+1\right)\dots\left(\frac{1}{a}+k+x+1\right)} \\ &= \frac{\dfrac{\left(\frac{p}{a}+k-1\right)!}{\left(\frac{p}{a}-1\right)!(k-1)!} \cdot \dfrac{\left(\frac{q}{a}+x-1\right)!}{\left(\frac{q}{a}-1\right)!x!}}{\dfrac{\left(\frac{1}{a}+k+x-1\right)!}{\left(\frac{1}{a}-1\right)!(k+x-1)!}}. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Durch einfache Umformungen erhält man

$$P_x = \frac{k\dfrac{\left(\frac{p}{a}+k-1\right)!\left(\frac{q}{a}+x-1\right)!}{\left(\frac{p}{a}-1\right)!k!\left(\frac{q}{a}-1\right)!x!}}{\dfrac{\left(\frac{1}{a}+k+x-1\right)!}{\left(\frac{1}{a}-1\right)!(k+x)!} \cdot (k+x)}$$

$$= \frac{\frac{k}{k+x}\binom{\frac{p}{a}+k-1}{k}\binom{\frac{q}{a}+x-1}{x}}{\binom{\frac{1}{a}+k+x-1}{k+x}}. \tag{7.39}$$

Mit Hilfe von (4.3) ergibt sich daraus eine dritte Form

$$P_x = \frac{k}{k+x}\,\frac{\binom{-\frac{p}{a}}{k}\binom{-\frac{q}{a}}{x}}{\binom{-\frac{1}{a}}{k+x}}. \tag{7.40}$$

Der Ausdruck (7.38) läßt sich schließlich in die Form

$$P_x = \frac{\binom{\frac{q}{a}+x-1}{x}\dfrac{\left(\frac{1}{a}-1\right)!}{\left(\frac{1}{a}+k+x-1\right)!}}{\dfrac{\left(\frac{p}{a}-1\right)!}{\left(\frac{p}{a}+k-1\right)!}}\cdot\frac{(k+x-1)!}{(k-1)!}.$$

überführen. Multipliziert man den Zähler mit $(-k-x)!/(-k-x)!$ und den Nenner mit $(-k)!/(-k)!$, so bekommt man eine vierte Form

$$P_x = \frac{(-1)^x\binom{-\frac{q}{a}}{x}\left[\dfrac{\left(\frac{1}{a}-1\right)!}{\left(\frac{1}{a}+k+x-1\right)!(-k-x)!}\right](-k-x)!}{\dfrac{\left(\frac{p}{a}-1\right)!}{\left(\frac{p}{a}+k-1\right)!(-k)!}\cdot(-k)!}\cdot\frac{(k+x-1)!}{(k-1)!}$$

$$= \frac{(-1)^x\binom{-\frac{q}{a}}{x}\binom{\frac{1}{a}-1}{-k-x}}{\binom{\frac{p}{a}-1}{-k}}\cdot\frac{(-k-x)!(k+x-1)!}{(-k)!(k-1)!}$$

$$= \frac{\binom{-\frac{q}{a}}{x}\binom{\frac{1}{a}-1}{-k-x}}{\binom{\frac{p}{a}-1}{-k}}, \tag{7.41}$$

weil $(-k)!/(-k-x)! = (-1)^x(k+x-1)!/(k-1)!$ ist, was der Leser in der Übung 7.5.1 beweisen soll. Andere Formeln sollte sich der Leser bereits selbst ableiten können.

Die letzte Formel ist am besten geeignet für die Berechnung der Momente. Das **r-te faktorielle Moment** lautet

$$\mu_{(r)} = \sum_{x=r}^{\infty} x(x-1)\dots(x-r+1)\frac{\binom{-\frac{q}{a}}{x}\binom{\frac{1}{a}-1}{-k-x}}{\binom{\frac{p}{a}-1}{-k}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{q}{a}\right)\left(-\frac{q}{a}-1\right)\dots\left(-\frac{q}{a}-r+1\right)(-k)(-k-1)\dots(-k-r+1)}{\left(\frac{p}{a}-1\right)\left(\frac{p}{a}-2\right)\dots\left(\frac{p}{a}-r\right)}$$

$$= \frac{k(k+1)\dots(k+r-1)q(q+a)\dots[q+(r-1)a]}{(p-a)(p-2a)\dots(p-ra)} \quad \text{für} \quad p > ra. \tag{7.42}$$

Daraus ergibt sich z.B.

$$\mu_{(1)} = \mu_1' = \frac{kq}{p-a} \quad \text{für} \quad p > a$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_{(2)} &= \frac{k(k+1)q(q+a)}{(p-a)(p-2a)} \\ \mu_2' &= \frac{kq\,[(k+1)(1-a)-kp]}{(p-a)(p-2a)} \\ \mu_2 &= \frac{kq(1-a)\,[p+(k-1)a]}{(p-a)^2(p-2a)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad p > 2a \tag{7.43}$$

Übung 7.5.1. Man zeige, daß

$$(-k)!/(-k-x)! = (-1)^x(k+x-1)!/(k-1)!$$

ist.

Übung 7.5.2. Man leite die Rekursionsformel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der inversen Pólya-Verteilung ab.

Übung 7.5.3. Man leite den Modus der inversen Pólya-Verteilung ab.

Übung 7.5.4. Man berechne P_0 bis P_5 einer inversen Pólya-Verteilung mit den Parametern (a) $N = 5$, $M = 3$, $k = 2$, $s = 2$; (b) $k = 2$, $a = 0,5$, $p = 0,6$.

Benutzte und weiterführende Literatur:

Denes (1964); Eggenberger-Pólya (1923); Feller (1962); Fisz (1970); Johnson, Kotz (1969); Kapur, Saxena (1970); Patil, Joshi (1968); Sarkadi (1957); Skalmowski (1964); Tuldava (1974).

Aufgaben

7.1. Man berechne den Modus einer Pólya-Verteilung mit $N = 8$, $M = 4$, $n = 2$, $s = 1$.

7.2. Man berechne P_2 einer Pólya-Verteilung mit $N = 8$, $M = 4$, $n = 2$, $s = 1$.

7.3. Man schreibe die ersten vier Anfangsmomente der Pólya-Verteilung mit den Symbolen N, M, n, s. [Man benutze (7.8), (7.14) bis (7.16) und die Transformation (7.4)].

7.4. Man berechne die ersten vier Anfangsmomente der Pólya-Verteilung mit den Parametern $N = 6$, $M = 3$, $n = 2$, $s = 2$ (d.h. $p = q = 1/2$, $a = 1/3$).

7.5. Man zeige, daß die Pólya-Verteilung (a) monoton fallend ist für

$$\frac{nM}{n - M + (n-1)s} < 1.$$

[Man beachte $P_0/P_1 > 1$.]
(b) monoton wachsend ist für

$$\frac{M + (n-1)s}{n(N-M)} > 1.$$

[Man beachte $P_n/P_{n-1} > 1$.]
(c) symmetrisch ist für $M/N = 0,5$. [Man beachte $P_0/P_1 = P_n/P_{n-1}$.]

7.6. Man zeige, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion der 1-verschobenen Pólya-Verteilung für $x = 1, 2, \ldots, n+1$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$f(x) = \frac{\binom{n}{x-1} \prod_{j=0}^{x-2}(M+js) \prod_{j=0}^{n-x}(N-M+js)}{\prod_{j=0}^{n-1}(N+js)} \tag{7.44a}$$

$$= \frac{\dbinom{-\frac{M}{s}}{x-1}\dbinom{-\frac{N-M}{s}}{n-x+1}}{\dbinom{-\frac{N}{s}}{n}} \tag{7.44b}$$

$$= \frac{\dbinom{-\frac{p}{a}}{x-1}\dbinom{-\frac{q}{a}}{n-x+1}}{\dbinom{-\frac{1}{a}}{n}} \tag{7.44c}$$

$$= \frac{\dbinom{\frac{p}{a}+x-2}{x-1}\dbinom{\frac{q}{a}+n-x}{n-x+1}}{\dbinom{\frac{1}{a}+n-1}{n}} \tag{7.44d}$$

$$= \binom{n}{x-1}\frac{p(p+a)\ldots[p+(x-2)a]\,q(q+a)\ldots[q+(n-x)a]}{1(1+a)(1+2a)\ldots[1+(n-1)a]} \tag{7.44e}$$

$$= \binom{n}{x-1}\prod_{j=0}^{x-2}(p+ja)\prod_{j=0}^{n-x}(q+ja)\Big/\prod_{j=0}^{n-1}(1+ja). \tag{7.44f}$$

7.7. Aus (7.42c) berechne man das erste Anfangsmoment der 1-verschobenen Pólya-Verteilung. [Man setze $x = (x-1)+1$.]

7.8. Man leite die Rekursionsformel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der 1-verschobenen Pólya-Verteilung (7.25) ab.

7.9. Man zeige, daß man beim Einsetzen von $s = -1$ in μ_3 der Pólya-Verteilung μ_3 der hypergeometrischen Verteilung bekommt.

7.10. Man zeige, daß man beim Einsetzen von $s = 0$ in μ_2 der Pólya-Verteilung μ_2 der Binomialverteilung bekommt.

7.11. Man versuche, an die Daten von Skalmowski (1964) die Pólya-Verteilung anzupassen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
f_x	99	79	50	37	20	9	5	1	300

[$a = 0{,}197830$; $p = 0{,}215714$; $q = 0{,}784286$; $n = 7$.]

7.12. Man leite μ_2 der diskreten Rechteckverteilung aus (7.30) ab und zeige, daß man es aus μ_2 der Pólya-Verteilung durch Einsetzen von $M = N - M = s$ auch ableiten kann.

7.13. Man zeige, daß unter den Bedingungen (7.35) die Pólya-Verteilung gegen die Poisson-Verteilung strebt. [Man benutze (7.5a).]

7.14. Man zeige, daß γ_1 der Pólya-Verteilung gegen γ_1 der Poisson-Verteilung strebt, wenn die Bedingungen (7.35) erfüllt sind.

7.15. Man zeige, daß μ_2 der Pólya-Verteilung gegen μ_2 der negativen Binomialverteilung strebt, wenn die Bedingungen (7.31) erfüllt sind.

7.16. Man zeige, daß die negative Binomialverteilung ein Spezialfall der inversen Pólya-Verteilung ist, wenn $s = 0$ bzw. $a = 0$ gilt.

7.17. Man zeige, daß μ_2 der inversen Pólya-Verteilung zu μ_2 der negativen Binomialverteilung wird, wenn man $s = 0$ oder $a = 0$ setzt.

7.18. Man zeige, daß die inverse Pólya-Verteilung gegen die negative Binomialverteilung strebt für $N \to \infty, M \to \infty$ und $M/N = p$.

7.19. Man zeige, daß die inverse hypergeometrische Verteilung (II) ein Spezialfall der inversen Pólya-Verteilung ist, wenn $s = -1$ gilt. [Man benutze 7.36.]

7.20. Man zeige, daß μ_1' der inversen Pólya-Verteilung zu μ_1' der inversen hypergeometrischen Verteilung wird, wenn $s = -1$ gilt.

7.21. Man zeige, daß die inverse Pólya-Verteilung gegen die Poisson-Verteilung strebt für $k \to \infty$, $q \to 0$, $a \to 0$, $ka \to 0$, $kq = \lambda$.

7.22. Man zeige, daß μ_2 der inversen Pólya-Verteilung zu μ_2 der Poisson-Verteilung wird, wenn die Bedingungen in der Aufgabe 7.21 erfüllt sind.

7.23. Man leite (a) $\mu_{(r)}$ und (b) μ_2 der negativen hypergeometrischen Verteilung ab.

7.24. Man zeige, daß μ_2 der negativen hypergeometrischen Verteilung identisch ist mit μ_2 der inversen hypergeometrischen Verteilung (II), wenn man N durch $M+1$, M durch k und n durch $N-M$ ersetzt.

7.25. Man zeige, daß die Rekursionsformel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der negativen hypergeometrischen Verteilung

$$P_{x+1} = \frac{(M+x)(n-x)}{(x+1)(N-M+n-x-1)} \cdot P_x$$

ist.

7.26. Man zeige: Wenn n bekannt ist, dann kann man N und M der negativen hypergeometrischen Verteilung folgendermaßen schätzen:

$$\hat{N} = \frac{n\left(n\bar{x}^2 + n\bar{x} - m_2'\right)}{nm_{(2)} + \bar{x}^2}; \qquad \hat{M} = \frac{\bar{x}\hat{N}}{n}.$$

7.27. Man zeige, daß man den Modus der negativen hypergeometischen Verteilung folgendermaßen bestimmen kann:

$$\frac{(M-1)(n+1)}{N+2} - 1 \le x_M \le \frac{(M-1)(n+1)}{N+2}$$

7.28. Man zeige, daß die negative hypergeometische Verteilung gegen die Binomialverteilung strebt für $N \to \infty$, $M \to \infty$, $M/N = p$. [Man benutze (7.29a).]

7.29. Man zeige, daß die negative hypergeometrische Verteilung gegen die negative Binomialverteilung mit den Parametern M und p strebt für $N \to \infty$, $n \to \infty$, $\dfrac{N}{N+n} = p$.

7.30. Man zeige, daß die negative hypergeometrische Verteilung gegen die Poisson-Verteilung strebt für $N \to \infty$, $M \to \infty$, $n \to \infty$, $M/N \to 0$, $nM/N = \lambda$.

8. Die logarithmische Verteilung

8.1. Ableitung

Wir haben bereits in SL, Abschnitt 5.5 gezeigt, daß man den Ausdruck $\ln(1-q)$ in eine Taylorreihe entwickeln kann. Es ergibt sich nämlich

$$\ln(1-q) = -q - \frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} - \dots \tag{8.1}$$

Für $0 < q < 1$ konvergiert diese Reihe, und man kann sie für eine WF verwenden. Die neue Verteilung ist von der Form

$$f(x) = \frac{q^x}{-x\ln(1-q)} \quad \text{für} \quad x = 1, 2, \dots \quad 0 < q < 1 \tag{8.2}$$

Aus (8.1) folgt

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \frac{1}{-\ln(1-q)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{q^x}{x} = \frac{-\ln(1-q)}{-\ln(1-q)} = 1.$$

Es ist üblich, die Formel (8.2) auch in der Form

$$f(x) = \frac{Aq^x}{x} \quad \text{für} \quad x = 1, 2, \dots \tag{8.3}$$

zu schreiben, wobei

$$A = \frac{1}{-\ln(1-q)}$$

ist. Diese Verteilung wird in der Linguistik vorläufig wenig benutzt. Sie entstand in der Biologie (vgl. Fischer, Corbet, Williams 1943; Kendall

1948) und ergab sich als die Grenzform der negativen Binomialverteilung, bei der die nullte Klasse fehlt. Andere Ableitungen findet man übersichtlich dargestellt bei Nelson, David (1967).

Wir haben bereits erwähnt, daß der Parameter k der negativen Binomialverteilung keineswegs eine ganze Zahl zu sein braucht, obwohl er bei einem Urnenmodell die Anzahl der Erfolge dargestellt. Da sich die Wahrscheinlichkeit der nullten Klasse als

$$P_0 = \binom{k-1}{0} p^k q^0 = p^k$$

ergibt, bekommt man die im Punkt 1 **gestutzte negative Binomialverteilung** in der Form

$$f(x) = \frac{\binom{k+x-1}{x} p^k q^x}{1-p^k} \quad \text{für} \quad x = 1, 2, \ldots; \tag{8.4}$$

die Summe aller Glieder ohne P_0 ist $1 - p^k$. Man kann diesen Ausdruck auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{k(k+1)\ldots(k+x-1)p^k q^x}{x!(1-p^k)} \\ &= \frac{kp^k}{1-p^k}\left[\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+x-1)q^x}{x!}\right]. \end{aligned}$$

Dabei läßt man k gegen 0 streben und bekommt

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to 0} \frac{kp^k}{1-p^k} \cdot \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+x-1)q^x}{x!} = \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{kp^k}{1-p^k} \lim_{k\to 0} \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+x-1)q^x}{x!} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Kürzt man den ersten Ausdruck durch p^k, so ergibt sich

$$\lim_{k\to 0} \frac{kp^k}{1-p^k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{1/p^k - 1} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{p^{-k} - 1} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{e^{-k\ln p} - 1}.$$

Nach der Regel von De l'Hospital ergibt sich weiter:

$$\lim_{k\to 0} \frac{k}{e^{-k\ln p} - 1} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{e^{-k\ln p}(-\ln p)} = \frac{1}{-\ln p}. \tag{8.6}$$

Für den zweiten Faktor von (8.5) ergibt sich

$$\lim_{k\to 0} \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+x-1)q^x}{x!} = \frac{(x-1)!q^x}{x!} = \frac{q^x}{x} \tag{8.7}$$

Nun kann man (8.6) und (8.7) in (8.5) einsetzen und erhält

$$\lim_{k\to 0} \frac{\binom{k+x-1}{x} p^k q^x}{1-p^k} = \frac{1}{-\ln p} \cdot \frac{q^x}{x} = \frac{q^x}{-x\ln(1-q)},$$

was mit dem Ausdruck in (8.2) übereinstimmt. Die logarithmische Verteilung hat den Vorteil, daß sie nur einen Parameter hat und daher leicht anzupassen, jedoch nicht sehr flexibel ist.

Beispiel 8.1.1. Sei X logarithmisch verteilt mit dem Parameter $q = 0,2$. Man finde P_1 und P_2.

Lösung: Nach (8.2) ist

$$P_1 = \frac{q^1}{-1\ln(1-q)} = \frac{0,2}{-\ln(1-0,2)} = \frac{0,2}{-\ln 0,8} = 0,8963.$$

$$P_2 = \frac{q^2}{-2\ln 0,8} = 0,0896.\bullet$$

Ausführliche Tabellen der logarithmischen Verteilung findet man bei Williamson, Bretherton (1964) oder bei Patil, Kamat, Wani (1964).

Obwohl man die Wahrscheinlichkeiten leicht bestimmen kann, beschleunigt die **Rekursionsformel** noch die Rechnungen. Offenbar gilt

$$P_{x+1} = \frac{qx}{x+1} P_x. \tag{8.8}$$

Beispiel 8.1.2. Man berechne P_3 und P_4 einer logarithmischen Verteilung mit dem Parameter $q = 0,2$.

Lösung: Im Beispiel 8.1.1 haben wir festgestellt, daß $P_2 = 0,0896$ ist. Daraus folgt:

$$P_3 = \frac{0,2(2)}{3} 0,0896 = 0,0120$$

$$P_4 = \frac{0,2(3)}{4} 0,0120 = 0,0018. \bullet$$

Diese Verteilung ist immer J-förmig, was man leicht an der Rekursionsformel erkennt $(qx/(x+1) < 1)$, und der Modus liegt immer auf $x = 1$.

Übung 8.1.1. Man berechne P_x der logarithmischen Verteilung für $x = 1, 2, \ldots, 5$ mit dem Parameter $q = 0,35$.

Übung 8.1.2. Man leite die Rekursionsformel (8.8) ab.

8.2. Charakteristika

Die Berechnung der Momente erfolgt am leichtesten mit Hilfe der **MEF**. Wegen (8.1) gilt

$$E(e^{tx}) = M_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{tx} A q^x}{x} = A \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(qe^t)^x}{x} = A\left[-\ln\left(1 - qe^t\right)\right]$$

$$= \frac{\ln\left(1 - qe^t\right)}{\ln(1-q)}. \tag{8.9}$$

Die Ableitungen nach t sind

$$M_X'(t) = \frac{Aqe^t}{1 - qe^t},$$

$$M_X''(t) = \frac{Aqe^t}{(1 - qe^t)^2},$$

$$M_X'''(t) = \frac{A\left[qe^t + (qe^t)^2\right]}{(1 - qe^t)^3},$$

$$M_X^{(4)}(t) = \frac{A\left[qe^t + 4(qe^t)^2 + (qe^t)^3\right]}{(1 - qe^t)^4},$$

woraus sich nach Einsetzung von $t = 0$

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{Aq}{p}, \\ \mu_2' &= \frac{Aq}{p^2}, \\ \mu_3' &= \frac{Aq(1+q)}{p^3}, \\ \mu_4' &= \frac{Aq\left(1 + 4q + q^2\right)}{p^4} \end{aligned} \tag{8.10}$$

ergibt. Für die Anfangsmomente gilt auch die Rekursionsformel

$$\mu_{r+1}' = q\left(\frac{A\mu_r'}{p} + \frac{d\mu_r'}{dq}\right) \tag{8.11}$$

deren Richtigkeit der Leser nachweisen soll (vgl. Übung 8.2.3).

Beispiel 8.2.1. Man berechne μ_2' aus (8.11).

Lösung:

$$\frac{d\mu_1'}{dq} = \frac{d}{dq}\left[\frac{Aq}{p}\right] = -\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{(1-q)\ln(1-q)}\right]$$

$$= \frac{-q-\ln(1-q)}{(1-q)^2\left[\ln(1-q)\right]^2} = \frac{A-A^2q}{(1-q)^2} = \frac{A}{p^2} - \frac{A^2q}{p^2},$$

woraus

$$\mu_2' = q\left[\frac{A}{p}\left(\frac{Aq}{p}\right) + \frac{A}{p^2} - \frac{A^2q}{p^2}\right] = \frac{Aq}{p^2}.$$

folgt. Man beachte, daß $A = \dfrac{1}{-\ln(1-q)}$ ist. •

Beispiel 8.2.2. Man berechne μ_2' einer logarithmischen Verteilung mit den Parametern $q = 0,2$.

Lösung:

$$\mu_2' = \frac{0,2}{0,8^2(-\ln 0,8)} = 1,40.\bullet$$

Die direkte Berechnung der Momente läßt sich sehr vereinfachen, wenn man erst die **faktoriellen Momente** ableitet. Sie ergeben sich folgendermaßen:

$$\mu_{(r)} = A\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)q^x}{x}$$

$$= Aq^r\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)q^{x-r}$$

$$= Aq^r\sum_{x=1}^{\infty}\frac{d^{r-1}\left(q^{x-1}\right)}{dq^{r-1}},$$

weil

$$\frac{d^{r-1}\left(q^{x-1}\right)}{dq^{r-1}} = (x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)q^{x-r}$$

gilt.

Also ist

$$\mu_{(r)} = Aq^r\frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}}\sum_{x=1}^{\infty}q^{x-1}$$

$$= Aq^r\frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}}\left(1+q+q^2+\ldots\right)$$

$$= Aq^r\frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}}\left(\frac{1}{1-q}\right)$$

$$= \frac{Aq^r(r-1)!}{p^r}. \tag{8.12}$$

Beispiel 8.2.3. Aus (8.12) berechne man $\mu_{(1)}$, $\mu_{(2)}$ und daraus μ_2'.

Lösung:

$$\mu_{(1)} = \frac{Aq}{p}; \quad \mu_{(2)} = \frac{Aq^2}{p^2};$$

$$\mu_2' = \frac{Aq}{p} + \frac{Aq^2}{p^2} = \frac{Aq(p+q)}{p^2} = \frac{Aq}{p^2}.\bullet$$

Die **Anfangsmomente** ergeben sich gemäß (6.30), S. 198 als

$$\mu_r' = \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)\frac{(k-1)!Aq^k}{p^k}. \tag{8.13}$$

Beispiel 8.2.4. Man berechne μ_3' aus (8.13).

Lösung:

$$\mu_3' = Z(3,1)\frac{A(1-1)!q^1}{p^1} + Z(3,2)\frac{A(2-1)!q^2}{p^2} + Z(3,3)\frac{A(3-1)!q^3}{p^3}$$

$$= \frac{Aq}{p} + \frac{3Aq^2}{p^2} + \frac{2Aq^3}{p^3}$$

$$= \frac{Aq\,(p^2+3pq+2q^2)}{p^3} = \frac{Aq(1+q)}{p^3},$$

wobei $p = 1 - q$ gilt. •

Mit Hilfe von (8.13) und (SL: 5.20) erhält man die Formel für die **Zentralmomente** als

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(-\frac{Aq}{p}\right)^{r-k} \left[\sum_{j=1}^{k} Z(k,j)\frac{(j-1)!Aq^j}{p^j}\right] \qquad (8.14)$$

oder rekursiv als

$$\mu_{r+1} = r\mu_2\mu_{r-1} + q\left(\frac{d\mu_r}{dq}\right). \qquad (8.15)$$

Die letzte Formel kann man jedoch nur für $r \geq 2$ verwenden.

Beispiel 8.2.5. Man berechne μ_2 aus der Formel (8.14).

Lösung:

$$\mu_2 = \binom{2}{0}\left(-\frac{Aq}{p}\right)^{2-0}(1) + \binom{2}{1}\left(-\frac{Aq}{p}\right)^{2-1}\left(\frac{Aq}{p}\right)$$

$$+ \binom{2}{2}\left(-\frac{Aq}{p}\right)^{2-2}\left[\frac{Aq}{p} + \frac{Aq^2}{p^2}\right]$$

$$= \frac{Aq(1-Aq)}{p^2}. \qquad (8.16)$$

Die weiteren Zentralmomente ergeben sich als

$$\mu_3 = \frac{Aq}{p^3}\left(1 + q - 3Aq + 2A^2q^2\right),$$

$$\mu_4 = \frac{Aq}{p^4}\left[1 + 4q + q^2 - 4Aq(1+q) + 6A^2q - 3A^3q^3\right] \qquad (8.17)$$

und die Koeffizienten der **Schiefe** und des **Exzesses** sind

$$\gamma_1 = \frac{(1 + q - 3Aq + 2A^2q^2)}{(1-Aq)\sqrt{(1-Aq)Aq}},$$

$$\gamma_2 = \frac{1 + 4q + q^2 - 7Aq - 4Aq^2 + 12A^2q^2 - 6A^3q^3}{Aq(1-Aq)^2}. \qquad (8.18)$$

Übung 8.2.1. Man führe die Ableitungen von (8.10) durch und überzeuge sich, daß die Resultate in (8.11) richtig sind.

Übung 8.2.2. Man leite μ_1' der logarithmischen Verteilung direkt aus der Definition ab.

Übung 8.2.3. Man beweise, daß die Formel (8.11) richtig ist.

8.3. Anpassung

Für die Anpassung muß man lediglich den Parameter q schätzen, wobei sich mehrere Möglichkeiten ergeben.

(a) Die einfachste Schätzung erfolgt durch Verwendung der Häufigkeiten in den ersten beiden Klassen:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\hat{q}/-\ln(1-\hat{q})}{\hat{q}^2/-2\ln(1-\hat{q})} = \frac{2}{\hat{q}}.$$

Daraus folgt

$$\hat{q} = \frac{2f_2}{f_1}, \tag{8.19}$$

wobei P_i die Wahrscheinlichkeiten sind. Wegen $q < 1$ ist die Anpassung nur sinnvoll für $2f_2/f_1 < 1$ bzw. $f_1 > 2f_2$.

(b) Aus der Häufigkeit der ersten Klasse und aus dem Durchschnitt ergibt sich wegen

$$\frac{P_1}{\mu_1'} = 1 - q$$

die Beziehung

$$\hat{q} = 1 - \frac{f_1/N}{\bar{x}} = 1 - \frac{f_1}{\sum_x x f_x}. \tag{8.20}$$

(c) Die Schätzung mit der Momentenmethode ist etwas langwieriger. Aus (8.10) folgt

$$\bar{x} = \frac{A\hat{q}}{\hat{p}} = \frac{\hat{q}}{-(1-\hat{q})\ln(1-\hat{q})}, \tag{8.21}$$

woraus man $\hat{q}$ iterativ berechnen muß.

(d) Eine andere iterative Berechnungsmöglichkeit ergibt sich mit Hilfe der Häufigkeit der ersten Klasse als

$$\frac{f_1}{N} = \frac{\hat{q}}{-\ln(1-\hat{q})}. \tag{8.22}$$

(e) Bildet man den Quotienten der ersten zwei Anfangsmomente, so bekommt man

$$\frac{\mu_1'}{\mu_2'} = \frac{Aq/p}{Aq/p^2} = p = 1 - q,$$

woraus

$$q = 1 - \frac{\mu_1'}{\mu_2'},$$

d.h.

$$\hat{q} = 1 - \frac{\sum_x x f_x}{\sum_x x^2 f_x} \tag{8.23}$$

folgt.

Beispiel 8.3.1. Brainerd (1974:181) hat aus *Lord Jim* von J. Conrad 500 aufeinanderfolgende Wörter auf Silbenlänge untersucht und bekam die folgende Verteilung

Anzahl der Silben x	1	2	3	4	5	$\sum$
Anzahl der Wörter f_x	383	83	22	8	4	500

Man untersuche, ob es eine logarithmische Verteilung sein könnte.

Lösung: Die Schätzungen nach den einzelnen Methoden (a) bis (e) ergeben:

(a) $$\hat{q} = \frac{2f_2}{f_1} = \frac{2(83)}{383} = 0,4334$$

(b) $$\hat{q} = 1 - \frac{f_1}{\bar{x}N} = 1 - \frac{383}{1,3340(500)} = 0,4258$$

(c) $$\bar{x} = \frac{\hat{q}}{-(1-\hat{q})\ln(1-\hat{q})}$$

$$\Rightarrow 1,334 = \frac{0,424}{-(0,576)\ln(0,576)} \Rightarrow \hat{q} = 0,424$$

(d) $$\frac{f_1}{N} = \frac{\hat{q}}{-\ln(1-\hat{q})} \Rightarrow 0,766 = \frac{\hat{q}}{-\ln(1-\hat{q})} \Rightarrow \hat{q} = 0,428$$

(e) $$\hat{q} = 1 - \frac{\bar{x}}{m_2'} \Rightarrow \hat{q} = 1 - \frac{1,334}{2,282} = 0,4154.$$

Aus der Schätzung (a) mit $\hat{q} = 0,4334$ ergibt sich nach (8.8)

$$NP_1 = \frac{500\hat{q}}{-\ln(1-\hat{q})} = \frac{500(0,4334)}{0,5681} = 381,45,$$

$$NP_2 = \frac{\hat{q}(1)}{2} NP_1 = \frac{0,4334}{2} 381,45 = 82,66,$$

$$NP_3 = \frac{\hat{q}(2)}{3} NP_2 = \frac{0,4334(2)}{3} 82,66 = 23,88,$$

$$NP_4 = \frac{\hat{q}(3)}{4} NP_3 = \frac{0,4334(3)}{4} 23,88 = 7,76,$$

$$NP_{\geq 5} = N - \sum_{x=1}^{4} NP_x = 500 - 495,75 = 4,25.$$

Wie man sieht, ist diese Anpassung sehr gut. Die Anpassungen (a) – (e) sind in der Tabelle 8.1 zusammengefasst. Man kann sie vorläufig als ziemlich gut betrachten.

Tabelle 8.1.
Anpassung der logarithmischen Verteilung an die Daten von Brainerd (1974:181)

Silbenzahl	Beobachtete Wortzahl f_x	Erwartete Wortzahl NP_x				
		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1	383	381,45	383,76	384,30	383,09	386,90
2	83	82,66	81,70	81,47	81,98	80,36
3	22	23,88	23,19	23,03	23,39	22,25
4	8	7,76	7,41	7,32	7,51	6,93
5	4	4,25	3,94	3,87	4,03	3,56
N	500	500	500	499,99	500	500,01

Übung 8.3.1. Grotjahn (1979) hat festgestellt, daß die Zahl der Silben pro Wort in Goethes Erlkönig folgendermaßen verteilt ist:

Zahl der Silben x	1	2	3	4	$\sum$
Zahl der Wörter f_x	152	65	6	2	225

Man berechne alle Schätzungen (a) bis (e) von q und stelle fest, ob eine logarithmischen Verteilung vorliegen könnte.

Übung 8.3.2. Man untersuche, ob die folgende Verteilung logarithmisch sein könnte:

x	1	2	3	4	5	$\sum$
f_x	78	15	4	2	1	100

Man benutze nur die Schätzung (a).

8.4. Modifizierte logarithmische Verteilung

Man kann die logarithmische Verteilung so modifizieren, daß sie auch in 0 definiert ist. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist dabei

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } x = 0 \\ (1-\alpha)\dfrac{Aq^x}{x} & \text{für } x = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{8.24}$$

mit $0 \leq \alpha \leq 1$.

Die **Anfangsmomente** $\tilde{\mu}'_r$ sind mit den Anfangsmomenten μ'_r der logarithmischen Verteilung bis auf den Faktor $(1-\alpha)$ identisch, d.h.

$$\tilde{\mu}'_r = (1-\alpha)\mu'_r$$

Es gilt also

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}'_1 &= (1-\alpha)\frac{Aq}{p},\\
\tilde{\mu}'_2 &= (1-\alpha)\frac{Aq}{p^2},\\
\tilde{\mu}'_3 &= (1-\alpha)\frac{Aq(1+q)}{p^3},\\
\tilde{\mu}'_4 &= (1-\alpha)\frac{Aq\,(1+4q+q^2)}{p^4}.
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

Eine entsprechende Beziehung besteht zwischen den **Zentralmomenten** der logarithmischen und der modifizierten logarithmischen Verteilung. Ersetzt man in den Formeln (8.16) und (8.17) A durch $A' = (1-\alpha)A$, so bekommt man die Zentralmomente der modifizierten logarithmischen Verteilung.

Bei der **Anpassung** sieht das Problem etwas anders aus, da man jetzt zwei Parameter schätzen muß. Die Häufigkeit der nullten Klasse ist gegeben, so daß

$$\hat{\alpha} = \frac{f_0}{N} \tag{8.26}$$

gilt.

(a) Benutzt man die Häufigkeit der ersten Klasse, so ergibt sich

$$\frac{f_1}{N} = (1-\hat{\alpha})\frac{\hat{q}}{-\ln(1-\hat{q})} = \left(1-\frac{f_0}{N}\right)\frac{\hat{q}}{-\ln(1-\hat{q})},$$

woraus

$$\frac{f_1}{N-f_0} = \frac{\hat{q}}{-\ln(1-\hat{q})} \tag{8.27}$$

folgt.
Aus dieser Formel kann man $\hat{q}$ iterativ berechnen.

(b) Eine iterative Lösungsmöglichkeit ergibt sich auch bei der Benutzung von $\bar{x}$, nämlich durch (vgl. (8.21))

$$\frac{\sum_x x f_x}{N-f_0} = \frac{\hat{q}}{-(1-\hat{q})\ln(1-\hat{q})}. \tag{8.28}$$

(c) Benutzt man die ersten zwei Anfangsmomente, so bekommt man dasselbe Resultat wie in (8.23), nämlich

$$\hat{q} = 1 - \frac{\sum_x x f_x}{\sum_x x^2 f_x}.$$

Die **Modifikation einer Verteilung** hat den Vorteil, daß sie eventuelle Unregelmäßigkeiten in den Daten auszugleichen vermag. Nachteilig ist die Hinzufügung eines weiteren Parameters. Allgemein ergeben sich folgende Möglichkeiten:

(1) Wenn die theoretische Verteilung bei $x = 1$ anfängt, konstruiert man eine bei $x = 0$ beginnende Verteilung wie folgt:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \alpha\\
P_x &= (1-\alpha)f(x), \quad x = 1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

Auf diese Weise ergab sich die modifizierte logarithmische Verteilung.

(2) Wenn die beobachtete Häufigkeit der nullten Klasse einer sonst passenden theoretischen Verteilung nicht entspricht, so setzt man

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \alpha + (1-\alpha)f(0),\\
P_x &= (1-\alpha)f(x), \quad x = 1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

Beispiel 8.4.1. Man modifiziere P_0 einer Binomialverteilung entsprechend (8.30) und berechne die Erwartung.

Lösung:

$$P_x = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} & x = 0\\[2ex] (1-\alpha)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} & x = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

$$\mu_1' = 0\left[\alpha + (1-\alpha)\binom{n}{0}p^0 q^{n-0}\right] + (1-\alpha)\sum_{x=1}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$
$$= 0 + (1-\alpha)np = (1-\alpha)np. \bullet$$

Beispiel 8.4.2. Man zeige, daß man den Parameter α der modifizierten Binomialverteilung durch

$$\hat{\alpha} = \frac{f_0/N - q^n}{1 - q^n},$$

schätzen kann, wenn n und p bekannt sind.

Lösung: Aus

$$\frac{f_0}{N} = \hat{\alpha} + (1-\hat{\alpha})q^n = \hat{P}_0,$$

ergibt sich das Resultat durch Auflösung nach α. •

(3) Ist die theoretische Verteilung r-verschoben, dann setzt man

$$P_x = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)f(r) & x = r \\ (1-\alpha)f(x) & x = r+1, r+2, \ldots \end{cases} \tag{8.31}$$

Beispiel 8.4.3. (a) Man modifiziere die 1-verschobene Poissonverteilung und berechne (b) $F(\infty)$ und (c) μ_1'.

Lösung:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda} & x = 1 \\ (1-\alpha)\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} & x = 2, 3, \ldots . \end{cases}$$

$$(b) \quad F(\infty) = \alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}(1-\alpha)\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$= \alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}(1-\alpha)(e^{\lambda} - 1) = 1.$$

$$(c) \quad \mu_1' = 1\cdot\alpha + 1(1-\alpha)e^{-\lambda} + (1-\alpha)e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{x\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$= \alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda} + (1-\alpha)e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{[(x-1)+1]\,\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$= \alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda} + (1-\alpha)e^{-\lambda}\lambda\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} +$$
$$+ (1-\alpha)e^{-\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$
$$= \alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda} + (1-\alpha)e^{-\lambda}e^{\lambda}\lambda + (1-\alpha)e^{-\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$
$$= 1 + (1-\alpha)\lambda,$$

was zu erwarten war, da 1 der Verschiebungsparameter ist. •

Beispiel 8.4.4. Wenn λ bekannt ist, schätze man den Parameter α der modifizierten 1-verschobenen Poissonverteilung aus der Häufigkeit der ersten Klasse.

Lösung: Aus $P_1 = \alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda}$ folgt

$$\alpha = \frac{P_1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}},$$

so daß sich

$$\hat{\alpha} = \frac{f_1/N - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

ergibt. •

(4) Wenn eine bestimmte Klasse $x = c$ modifiziert wird, setzt man in Verallgemeinerung zu (8.30):

$$P_x = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)f(x) & x = c, \\ (1-\alpha)f(x) & x = 0,1,\ldots,c-1,c+1,\ldots \end{cases} \tag{8.32}$$

Beispiel 8.4.5. (a) Man modifiziere die Häufigkeit der Klasse $x = 2$, wenn X negativ binomial verteilt ist mit den Parametern k und p; (b) man berechne μ_1'.

Lösung:

(a)

$$P_x = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\binom{k+1}{2}p^k q^2 & x = 2 \\ (1\alpha)\binom{k+x-1}{x}p^k q^x & x = 0,1,3,4,\ldots \end{cases}$$

(b) Am einfachsten verfährt man so, daß man zunächst die Summe vollständig berechnet, d.h. einschließlich der Klasse $x = 2$, die man dann abzieht:

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \left[(1-\alpha)\sum_{x=0}^{\infty} xf(x) - (1-\alpha)2f(2)\right] + 2\left[\alpha + (1-\alpha)f(2)\right] \\ &= \left[(1-\alpha)\sum_{x=0}^{\infty} x\binom{k+x-1}{x}p^k q^x - (1-\alpha)2\binom{k+2-1}{2}p^k q^2\right] + \\ &\quad + 2\left[\alpha + (1-\alpha)\binom{k+1}{2}p^k q^2\right] \\ &= \left[(1-\alpha)\frac{kq}{p} - 2(1-\alpha)\binom{k+1}{2}p^k q^2\right] + 2\alpha + 2(1-\alpha)\binom{k+1}{2}p^k q^2 \\ &= (1-\alpha)\frac{kq}{p} + 2\alpha. \quad \text{(vgl. Abschnitt 4.2).}\bullet \end{aligned}$$

Man kann natürlich auch mehrere Klassen modifizieren, aber dadurch erhöht sich die Anzahl der Parameter, wodurch die Anpassung erschwert wird. Es ist nicht ratsam, gute Anpassungen durch häufige Modifikationen zu erzwingen.

Übung 8.4.1. Man leite μ_1' und μ_2 der nach (8.29) modifizierten logarithmischen Verteilung ab.

Übung 8.4.2. Man berechne μ_1' für die in $x = 2$ modifizierte Poissonverteilung

$$f(x) = \begin{cases} (1-\alpha)\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,3,4,\ldots \\ \alpha + (1-\alpha)\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} & x = 2. \end{cases}$$

Übung 8.4.3. Man zeige, daß für eine in $x = c$ modifizierte Verteilung $F(\infty) = 1$ gilt. [Man benutze (8.32)].

Benutzte und weiterführende Literatur:

Brainerd (1974); Fisher, Corbet, Williams (1943); Johnson, Kotz (1969); Grotjahn (1979); Kendall (1948); Kendall, Stuart (1969); Nelson, David (1967); Patil (1962); Patil, Joshi (1968); Patil, Kamat, Wani (1964); Patil, Wani (1965); Williamson, Bretherton (1964).

Aufgaben

8.1. Man berechne P_1 bis P_4 einer logarithmischen Verteilung mit dem Parameter $q = 0,66$.

8.2. Man leite μ_2' und μ_3' der logarithmischen Verteilung direkt aus der Definition ab. [Man beachte:

$$\sum_{x=1}^{\infty} q^x = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}; \qquad xq^x = q\frac{d(q^x)}{dq};$$

$$x^2 q^x = q\frac{d(xq^x)}{dq}].$$

8.3. Man berechne (a) μ_3' und (b) μ_4' aus der Rekursionsformel (8.11).

8.4. Man überzeuge sich, daß

$$\frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{(r-1)!}{p^r}$$

ist.

8.5. Man leite die MEF der zentrierten logarithmisch verteilten Zufallsvariablen $M_{X-\frac{Aq}{p}}(t)$ ab und bestimme daraus μ_2 und μ_3.

8.6. Aus der Formel (8.13) berechne man μ_2' und μ_4'.

8.7. Aus der Formel (8.14) berechne man μ_3 und μ_4.

8.8. Man bestätige die Formeln (8.18).

8.9. Man berechne μ_3 aus der Formel (8.15).

8.10. Man zeige, daß die WEF der modifizierten logarithmischen Verteilung

$$G_X(t) = \alpha - (1-\alpha)A\ln(1-qt) \tag{8.33}$$

ist.

8.11. Man prüfe, ob für die logarithmische Verteilung die Beziehung

$$\mu_2 = \frac{\mu_1'}{p}(1 - p\mu_1')$$

gilt (Patil 1962).

8.12. Man drücke μ_3 der logarithmischen Verteilung als eine Funktion von μ_1' aus.

8.13. Man beweise folgende Beziehungen (Patil, Wani 1965):

$$(a)\quad \mu_{(r)} = \frac{(r-1)!\mu_{(1)}^r}{A^{r-1}}; \qquad (b)\quad \mu_{(r)} = \frac{(r-1)q\mu_{(r-1)}}{p}.$$

8.14. Man beweise, daß für die logarithmische Verteilung die Ungleichung $P_1 > xP_x$ $(x = 2, 3, \ldots)$ gilt.

8.15. Man beweise die Richtigkeit der Formel (8.15).

8.16. Man beweise die folgenden Relationen (Patil 1962):

(a) $$\mu_{r+1}' = q\frac{d\mu_r'}{dq} + \mu_1'\mu_r' \quad \text{[vgl. Übung 8.2.3]}$$

(b) $$\mu_{(r)} = Aq^r\frac{d^r}{dq^r}\left(\frac{1}{A}\right) \quad \text{[vgl. (8.12)]}$$

(c) $$\mu_{(r+1)} = \left(\mu_{(1)} - r\right)\mu_{(r)} + q\frac{d\mu_{(r)}}{dq}$$

(d) $$\mu_2' = \mu_1'/p$$

(e) $$\mu_3' = \mu_2'(1+q)/p$$

(f) $$\mu_4' = \mu_3'\left[(1+q) + \frac{2q}{(1+q)}\right]/p$$

8.17. Man zeige, daß für die logarithmische Verteilung

$$(a)\quad \lim_{q\to 0}\gamma_2/\gamma_1^2 = 1 \quad \text{und} \quad (b)\quad \lim_{q\to 1}\gamma_2/\gamma_1^2 = 3/2$$

gilt (Johnson, Kotz 1969:167).

8.18. Man zeige, daß das r-te faktorielle Moment der modifzierten logarithmischen Verteilung

$$\mu_{(r)} = \frac{(1-\alpha)Aq^r(r-1)!}{p^r}$$

ist. [Man benutze das Verfahren, das zu (8.12) führte.]

8.19. Man leite die MEF der modifizierten logarithmischen Verteilung ab.

8.20. Man stelle die in $x = 1$ gestutzte inverse hypergeometrische Verteilung auf und zeige, daß sie für $N \to \infty$, $M \to \infty$, $k \to 0$, $M/N = p$ gegen die logarithmische Verteilung konvergiert. [Es genügt, die Konvergenz gegen die in $x = 1$ gestutzte negative Binomialverteilung zu zeigen, vgl. Aufgabe 5.25, §8.1.] Auf ähnliche Weise konvergieren die negative hypergeometrische Verteilung, die Pólya-Verteilung und die inverse Pólya-Verteilung (alle in $x = 1$ gestutzt) gegen die logarithmische Verteilung (vgl. §7.4c, §7.4e, Aufgabe 7.18 und Aufgabe 7.29).

8.21. Man leite die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der logarithmischen Verteilung ab.

9. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (WEF)

9.1. Die Erzeugung von Wahrscheinlichkeiten

Wir haben bereits häufiger festgestellt, daß man mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion (weiter als WEF bezeichnet) Momente ableiten kann. Leitet man die WEF

$$G_X(t) = \sum_x f(x)t^x = \sum_x P_x t^x,$$

nach t ab, so ergibt sich

$$G'_X(t) = \sum_x x f(x) t^{x-1},$$

woraus

$$G'_X(1) = \sum_x x f(x) = \mu_{(1)} = \mu'_1$$

folgt. Die zweite Ableitung ist

$$G''_X(t) = \sum_x x(x-1) f(x) t^{x-2},$$

woraus

$$G''_X(1) = \sum_x x(x-1) f(x) = \mu_{(2)}$$

folgt. Allgemein gilt

$$G_X^{(r)}(1) = \mu_{(r)}. \tag{9.1}$$

Beispiele dieser Art wurden bereits öfter gerechnet. Genauso wichtig ist die Tatsache, daß man mit Hilfe der WEF die einzelnen Wahrscheinlichkeiten einer Verteilung "rekonstruieren" kann. Aus

$$G_X(t) = \sum_x P_x t^x = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + P_3 t^3 + \ldots,$$

folgt sofort

$$P_0 = G_X(0). \tag{9.2}$$

Leitet man die Reihe einmal nach t ab, so bekommt man

$$G'_X(t) = P_1 + 2P_2 t + 3P_3 t^2 + 4P_4 t^3 + \ldots,$$

woraus

$$G'_X(0) = P_1$$

folgt. Die zweite Ableitung liefert

$$G''_X(t) = 2P_2 + 3(2)P_3 t + 4(3)P_4 t^2 + \ldots.$$

Setzt man $t = 0$, so ergibt sich

$$\frac{G''_X(0)}{2} = P_2.$$

Aus

$$G'''_X(t) = 3(2)P_3 + 4(3)2P_4 t + \ldots$$

ergibt sich entsprechend

$$\frac{G'''_X(0)}{3!} = P_3.$$

Auf diese Weise bekommen wir die allgemeine Formel

$$P_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}. \tag{9.3}$$

Beispiel 9.1.1. Sei die WEF in der Form $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$ gegeben. Man rekonstruiere die Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Lösung:

$$\begin{array}{rcl|l}
G_X(0) & = & 0, & P_0 = 0, \\
G'_X(t) & = & \dfrac{p}{(1-qt)^2}, & G'_X(0) = P_1 = p, \\
G''_X(t) & = & \dfrac{2pq}{(1-qt)^3}, & \dfrac{G''_X(0)}{2!} = P_2 = pq, \\
G'''_X(t) & = & \dfrac{3(2)pq^2}{(1-qt)^4}, & \dfrac{G'''_X(0)}{3!} = P_3 = pq^2
\end{array}$$

usw., so daß allgemein

$$P_x = pq^{x-1} \quad \text{für} \quad x = 1, 2, \ldots$$

gilt, worin man die 1-verschobene geometrische Verteilung erkennt [vgl. 3.5.].●

Beispiel 9.1.2. Sei die WEF

$$G_X(t) = \frac{(a+bt)e^{bt}}{(a+b)e^b}$$

gegeben. Man rekonstruiere die Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Lösung:

$$\begin{array}{rcl|l}
G_X(0) & = & \dfrac{a}{(a+b)e^b}, & P_0 = \dfrac{a}{(a+b)e^b}, \\
G'_X(t) & = & \dfrac{be^{bt} + (a+bt)be^{bt}}{(a+b)e^b}, & P_1 = \dfrac{(1+a)b}{(a+b)e^b}, \\
G''_X(t) & = & \dfrac{2b^2e^{bt} + (a+bt)b^2e^{bt}}{(a+b)e^b}, & P_2 = \dfrac{(2+a)b^2}{2!(a+b)e^b}, \\
G'''_X(t) & = & \dfrac{3b^3e^{bt} + (a+bt)b^3e^{bt}}{(a+b)e^b} & P_3 = \dfrac{(3+a)b^3}{3!(a+b)e^b}
\end{array}$$

usw., allgemein

$$P_x = \frac{(x+a)b^x}{x!(a+b)e^b}, \quad x = 0, 1, \ldots . \bullet$$

Es ergibt sich die Frage, ob man auch eine WEF formulieren kann, die die kumulativen Wahrscheinlichkeiten erzeugt, d.h. entweder $P(X \leq x)$ oder $P(X > x)$. In der Tat ist dies ohne weiteres möglich. Wir bilden folgende Ausdrücke:

$$h_k = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_k$$

d.h.

$$h_k = P(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} P_x$$

und daraus eine erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} H_X(t) &= h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + \ldots \\ &= P_0 + (P_0 + P_1)t + (P_0 + P_1 + P_2)t^2 + \\ &\quad + (P_0 + P_1 + P_2 + P_3)t^3 + \ldots, \end{aligned} \tag{9.4}$$

Wie weiter unten gezeigt wird, ist letztere die erzeugende Funktion der kumulativen Wahrscheinlichkeiten (vgl. 9.6). Um $H_X(t)$ mit Hilfe von $G_X(t)$ darzustellen, multiplizieren wir beide Seiten von (9.4) mit $1-t$, woraus

$$\begin{aligned} (1-t)H_X(t) &= (1-t)[P_0 + (P_0 + P_1)t + (P_0 + P_1 + P_2)t^2 + \ldots] \\ &= P_0 + (P_0 + P_1)t + (P_0 + P_1 + P_2)t^2 + \ldots \\ &\quad - P_0 t - (P_0 + P_1)t^2 - (P_0 + P_1 + P_2)t^3 - \ldots \\ &= P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + P_3 t^3 + \ldots = G_X(t), \end{aligned}$$

folgt bzw.

$$H_X(t) = \frac{G_X(t)}{1-t}. \tag{9.5}$$

Analog zu (9.3) erzeugt nun $H_X(t)$ die kumulativen Wahrscheinlichkeiten, denn es gilt

$$\begin{aligned} H_X(0) &= P_0 \\ \frac{H_X^{(k)}(0)}{k!} &= \frac{1}{k!}\left[\frac{G_X^{(t)}}{1-t}\right]^{(k)}_{t=0} = P(X \leq k) = P_0 + P_1 + \ldots + P_k. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Beispiel 9.1.3. Sei die WEF der Binomialverteilung gegeben als $G_X(t) = (q+pt)^n$. Man konstruiere die kumulative WEF und berechne daraus P_0, P_1, P_2.

Lösung:

$$H_X(t) = \frac{G_X(t)}{1-t} = \frac{(q+pt)^n}{1-t}.$$

Daraus folgt

$$H_X(0) = q^n$$

und somit

$$P_0 = q^n,$$

$$H'_X(t) = \frac{np(q+pt)^{n-1}(1-t) + (q+pt)^n}{(1-t)^2}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{H'_X(0)}{1!} &= q^n + npq^{n-1} = P(X \leq 1), \\ H''_X(t) &= \left\{\left[n(n-1)p^2(q+pt)^{n-2}(1-t)\right](1-t) + \right. \\ &\quad \left. +2\left[np(q+pt)^{n-1}(1-t) + (q+pt)^n\right]\right\}/(1-t)^3 \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{H''_X(0)}{2!} = \frac{1}{2!}\left[n(n-1)p^2q^{n-2} + 2npq^{n-1} + 2q^n\right]$$
$$= q^n + npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} = P(X \le 2).$$

Man erhält nun $P_0 = q^n$, $P_1 = npq^{n-1}$, $P_2 = \binom{n}{2}p^2q^{n-2}$. •

Ganz analog kann man die erzeugende Funktion für $P(X > k)$ bilden. Wir definieren

$$\bar{h}_k = P_{k+1} + P_{k+2} + \ldots$$

und bilden die erzeugende Funktion

$$\begin{aligned}\bar{H}_X(t) &= \bar{h}_0 + \bar{h}_1 t + \bar{H}_2 t^2 + \ldots \\ &= (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) + (P_2 + P_3 + \ldots)t + \\ &\quad + (P_3 + P_4 + \ldots)t^2 + \ldots\end{aligned} \tag{9.7}$$

Analog zu (9.5) multiplizieren wir beide Seiten von (9.7) mit $(1-t)$:

$$\begin{aligned}(1-t)\bar{H}_X(t) &= (1-t)\left[(P_1 + P_2 + \ldots) + (P_2 + P_3 + \ldots)t + \right. \\ &\quad \left. + (P_3 + P_4 + \ldots)t^2 + \ldots\right] \\ &= (P_1 + P_2 + \ldots) + (P_2 + P_3 + \ldots)t + (P_3 + P_4 + \ldots)t^2 - \\ &\quad - (P_1 + P_2 + \ldots)t - (P_2 + P_3 + \ldots)t^2 - \\ &\quad - (P_3 + P_4 + \ldots)t^3 - \ldots \\ &= (P_1 + P_2 + \ldots) - P_1 t - P_2 t^2 - P_3 t^3 - \ldots \\ &= (1 - P_0) - P_1 t - P_2 t^2 - P_3 t^3 - \ldots \\ &= 1 - G_X(t).\end{aligned}$$

Daher ist

$$\bar{H}_X(t) = \frac{1 - G_X(t)}{1-t}, \tag{9.8}$$

und entsprechend (9.6) ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{H}_X(t) &= P(X > 0), \\ \frac{\bar{H}_X^{(k)}(0)}{k!} &= P(X > k).\end{aligned} \tag{9.9}$$

Beispiel 9.1.4. Die WEF der Poisson-Verteilung ist $G_X(t) = e^{-\lambda(1-t)}$. Man stelle $\bar{H}_X(t)$ auf und berechne daraus $P(X > 1)$.

Lösung: Aus

$$\bar{H}_X(t) = \frac{1 - e^{-\lambda(1-t)}}{1-t},$$

folgt

$$\begin{aligned}\bar{H}'_X(t) &= \frac{\lambda\left[-e^{-\lambda(1-t)}\right](1-t) + \left[1 - e^{-\lambda(1-t)}\right]}{(1-t)^2}, \\ \frac{\bar{H}'_X(0)}{1!} &= -\lambda e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda} = P(X > 1).\end{aligned}$$

Letzteres kann man direkt anhand von $f(x)$ überprüfen, denn $P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.•

Übung 9.1.1. Sei $G_X(t) = p(1 - qt)^{-1}$. Man rekonstruiere die ursprüngliche Verteilung. [Geometrische Verteilung.]

Übung 9.1.2. Sie $G_X(t) = (q + pt)^{a+b}$. Man rekonstruiere die ursprüngliche Verteilung. [Binomialverteilung mit $a + b$, p.]

Übung 9.1.3. Man konstruiere $\bar{H}_X(t)$ für die geometrische Verteilung und berechne daraus $P(X > 1)$.

9.2. Faltung von Verteilungen

Mit Hilfe der WEF kann man die mühsame direkte Faltung von Verteilungen, die wir öfter durchgeführt haben, vermeiden. Will man zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y addieren und die Verteilung der Summe $Z = X + Y$ ableiten, so ist

$$G_{X+Y}(t) = E\left(t^{x+y}\right) = E\left(t^x t^y\right) = E\left(t^x\right) E\left(t^y\right) = G_X(t) G_Y(t), \tag{9.10}$$

d.h., *die WEF der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen ist das Produkt der WEF dieser Zufallsvariablen.* Dieser Satz läßt sich auch auf mehrere Zufallsvariablen verallgemeinern. Die Bedingung ist, daß die Zufallsvariablen nur ganze, nicht negative Werte annehmen.

Beispiel 9.2.1. Sei X Poisson-verteilt mit dem Parameter λ und Y geometrisch verteilt mit dem Parameter q. Man finde die Verteilung von $Z = X + Y$.

Lösung: Die WEF sind:

$$\text{Poisson-Verteilung}: G_X(t) = e^{-\lambda(1-t)} = e^{-\lambda+\lambda t}$$

$$\text{Geometrische Verteilung}: G_Y(t) = p(1-qt)^{-1}.$$

Daher ist

$$G_Z(t) = pe^{-\lambda}e^{\lambda t}(1-qt)^{-1}.$$

Aus dieser WEF läßt sich die WF nach der Methode in Abschnitt 9.1. ableiten (vgl. Aufgabe 9.9). •

Besonders wichtig ist die Faltung von gleichen Verteilungen, die man mit $\star$ bezeichnet, d.h.

$$f(x) \star f(x) = f^{2\star}(x), \tag{9.11}$$

deren WEF dann

$$G_{X+X}(t) = G_X(t) G_X(t) = G_X^2(t)$$

ist. Faltet man n-mal, so bekommt man

$$f(x) \star f(x) \star \ldots \star f(x) = f^{n\star}(x) \tag{9.12}$$

und die WEF von (9.12) ist

$$G_{nX}(t) = G_X^n(t). \tag{9.13}$$

Beispiel 9.2.2. Seien X und Y binomal verteilt mit den Parametern n_1, p bzw. n_2, p. Man leite die Verteilung von $Z = X + Y$ mit Hilfe der WEF ab.

Lösung: Die WEF erhält man leicht aus der Definition als

$$G_X(t) = \sum_x t^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_x \binom{n}{x} (pt)^x q^{n-x} = (q+pt)^n.$$

Daher ist

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t) = (q+pt)^{n_1}(q+pt)^{n_2} = (q+pt)^{n_1+n_2}.$$

In dem letzten Ausdruck erkennt man sofort die WEF der Binomialverteilung mit den Parametern $n_1 + n_2$, p (vgl. Übung 9.1.2.). •

Beispiel 9.2.3. Seien X und Y Neyman-verteilt mit den Parametern m_1, λ bzw. m_2, λ. Man finde die Verteilung von $Z = X + Y$.

Lösung: Die WEF der Neyman-Verteilung wurde in (6.27) als

$$G_X(t) = e^{-m} e^{me^{-\lambda} e^{\lambda t}}$$

abgeleitet. Daraus folgt

$$\begin{aligned}G_Z(t) &= G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)\\ &= e^{-m_1}e^{m_1 e^{-\lambda}e^{\lambda t}}e^{-m_2}e^{m_2 e^{-\lambda}e^{\lambda t}}\\ &= e^{-(m_1+m_2)}e^{(m_1+m_2)e^{-\lambda}e^{\lambda t}},\end{aligned}$$

was wieder der WEF einer Neyman-Verteilung mit den Parametern m_1+m_2, λ entspricht. Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus (6.27) (vgl. Aufgabe 6.7.), indem man m durch $m_1 + m_2$ ersetzt. •

Es ist nicht unbedingt nötig, daß ein oder alle Parameter der zu addierenden Verteilungen gleich sind. Sie können ohne weiteres auch unterschiedlich sein. In dem Falle wird die resultierende WEF entsprechend komplizierter.

Man bedenke, daß eine Verteilung für $x = 1, 2, \ldots$, d.h. daß X den Wert Null nicht annimmt, bei Faltung mit $x = 2$ anfängt ($P_0 = P_1 = 0$). Dies gilt für 1-verschobene oder in $x = 1$ gestutzte Verteilungen.

Beispiel 9.2.4. (a) Man berechne $G_X(t)$ für eine 1-verschobene Poisson-Verteilung; (b) Man leite die WEF der Faltung zweier 1-verschobener Poisson-Verteilungen ab; (c) man rekonstruiere die WF.

Lösung:

(a)
$$\begin{aligned}G_X(t) &= \sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}t^x}{(x-1)!} = t\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!}\\ &= te^{-\lambda}e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}G_Z(t) &= G_{X+Y}(t) = \left(te^{-\lambda_1}e^{\lambda_1 t}\right)\left(te^{-\lambda_2}e^{\lambda_2 t}\right)\\ &= t^2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{t(\lambda_1+\lambda_2)}.\end{aligned}$$

(c) $G_Z(0) = 0$, woraus $P_0 = 0$ folgt
$$G'_Z(t) = 2te^{-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{t(\lambda_1+\lambda_2)} + t^2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{t(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2),$$

woraus sich

$$G'_Z(0) = 0 = P_1$$

ergibt.

$$\begin{aligned}G''_Z(t) &= 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{t(\lambda_1+\lambda_2)} + 4te^{-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{t(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)+\\ &\quad + t^2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{t(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2),\end{aligned}$$

woraus

$$\frac{G''_Z(0)}{2!} = \frac{2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{2!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = P_2$$

folgt usw.

Übung 9.2.1. Seien X bzw. Y Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2. Man zeige, daß ihre Summe auch Poisson-verteilt ist.

Übung 9.2.2. Man falte eine geometrische Verteilung mit dem Parameter p k-mal und zeige, daß die resultierende Verteilung eine negative Binomialverteilung ist.

9.3. Zusammensetzung und Verallgemeinerung von Verteilungen

Wir betrachten eine bedingte Verteilung, die von einem Parameter θ abhängt. Sie sei mit $f(x|\theta)$ bezeichnet. Nehmen wir an, daß θ selbst eine Zufallsvariable ist, die nach einem anderen Wahrscheinlichkeitsgesetz $g(\theta)$ verteilt ist. In diesem Fall haben wir zwei Zufallsvariablen, nämlich X und Θ; ihre gemeinsame Verteilung $P(X = x, \Theta = \theta)$ ergibt sich nach der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten zu (vgl. SL, Abschnitt 2.4):

$$P(X = x, \Theta = \theta) = P(X = x|\Theta = \theta)P(\Theta = \theta).$$

Mit Hilfe der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen formuliert lautet die Beziehung

$$f(x,\theta) = f(x|\theta)g(\theta). \tag{9.14}$$

Um nun aus $f(x,\theta)$ die (nichtbedingte) Verteilung von X zu bekommen, ist die Randverteilung zu berechnen:

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_\theta f(x,\theta) & \text{wenn } \theta \text{ diskrete Werte annimmt} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta)d\theta & \text{wenn } \theta \text{ stetige Werte annimmt.} \end{cases}$$

Diese Art der Zusammensetzung wird mit

$$f(x|\theta) \bigwedge_\theta g(\theta) \tag{9.15}$$

bezeichnet. Anstelle der Symbole $f(x|\theta)$ und $g(\theta)$ können auch die Namen der Verteilungen treten. Dabei werden jeweils alle Parameter in Klammern angegeben; unter dem $\wedge$-Zeichen steht der Parameter der linken Verteilung, der als Zufallsvariable der Verteilung rechts von $\wedge$ folgt.

Beispiel 9.3.1. Sei X binomial verteilt, mit den Parametern n und p. Sei der Parameter n der Binomialverteilung selbst eine Zufallsvariable (N), die einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter λ folgt. Was ist die (nichtbedingte) Verteilung von X?

Lösung: Es ist die zusammengesetzte Verteilung

$$\text{Binomialv.}(n,p) \bigwedge_n \text{Poisson-V.}(\lambda)$$

zu bestimmen (vgl. (9.15)). Die bedingte Verteilung von X ist

$$f(x|n) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n,$$

während die Verteilung von N bekanntlich

$$g(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad n = 0,1,\ldots$$

ist. Die gemeinsame Verteilung von X und N ergibt sich nach (9.14) zu

$$f(x,n) = f(x|n)g(n) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},$$

woraus man die Randverteilung von X berechnet:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \sum_{n=x}^{\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^x \lambda^x}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{\lambda^{n-x} q^{n-x}}{(n-x)!} = \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^x}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(q\lambda)^{n-x}}{(n-x)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^x e^{q\lambda}}{x!} = \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^x}{x!}, \quad x = 0,1,\ldots \end{aligned} \tag{9.16}$$

wegen $q = 1 - p$. Diese Verteilung ist wieder eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter $p\lambda$, wird aber oft als die **zusammengesetzte Binomialverteilung** bezeichnet.

Beispiel 9.3.2. Sei X Poisson-verteilt mit dem Parameter λ, der selbst eine exponentialverteilte Zufallsvariable darstellt, d.h. $g(\lambda) = be^{-b\lambda}, \lambda > 0$. Man bestimme die (nichtbedingte) Verteilung von X.

Lösung:

$$f(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot be^{-b\lambda}, \quad x = 0,1,\ldots,\lambda > 0.$$

Daraus folgt

$$f(x) = \frac{b}{x!}\int_0^{\infty} \lambda^x e^{-\lambda(b+1)} d\lambda = \frac{b}{x!}\frac{\Gamma(x+1)}{(b+1)^{x+1}} = \frac{b}{(b+1)^{x+1}},$$

da $\Gamma(x+1) = x!$ (vgl. SL: S. 220). Setzt man

$$\frac{b}{b+1} = p \quad \text{und} \quad \frac{1}{b+1} = q = 1-p,$$

so ergibt sich

$$f(x) = pq^x, \quad x = 0, 1, \ldots$$

d.h. die geometrische Verteilung. •

Bei der obigen Zusammensetzung von Verteilungen haben wir von der WEF keinen Gebrauch gemacht. Stellen wir uns jedoch vor, daß der Parameter Θ der (bedingten) Verteilung von X die Werte θy annehmen kann und Y selbst eine Zufallsvariable mit eigener Verteilung ist, dann bekommen wir eine Zusammensetzung, die wir mit

$$f(x|\theta y) \bigwedge_y g(y) \tag{9.17}$$

bezeichnen. Analog zu (9.15) können anstelle der Symbole auch die Namen der Verteilungen stehen.

Beispiel 9.3.3. Man zeige, daß die Neyman-Verteilung (vgl. Kap. 6) der Zusammensetzung

$$\text{Poisson-V. } (\lambda y) \bigwedge_y \text{Poisson-V. } (m)$$

entspricht.

Lösung: Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter λy (links) lautet

$$f(x|\lambda y) = \frac{e^{-\lambda y}(\lambda y)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots.$$

Die Verteilung rechts ist

$$g(y) = \frac{e^{-m} m^y}{y!}, \quad y = 0, 1, \ldots.$$

Daraus folgt

$$f(x,y) = f(x|\lambda y) g(y) = \frac{e^{-\lambda y}(\lambda y)^x}{x!} \cdot \frac{e^{-m} m^y}{y!}$$

und

$$f(x) = \frac{e^{-m}\lambda^x}{x!} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y^x \left(me^{-\lambda}\right)^y}{y!}, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

was der WF der Neyman-Verteilung entspricht. •

Bei einer bestimmten Klasse von Verteilungen kann man für diese Art der Zusammensetzung die WEF ausnützen. Die Bedingung dafür ist, daß die WEF die folgende Eigenschaft hat:

$$G_X(t|\theta y) = [G_X(t|\theta)]^y . \tag{9.18}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann bekommen wir bei der Zusammensetzung wegen $f(x) = \sum_y f(x|\theta y) g(y)$ die WEF von X als

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_x t^x f(x) = \sum_x t^x \sum_y f(x|\theta y) g(y) \\ &= \sum_y g(y) \sum_x f(x|\theta y) t^x = \sum_y g(y) G_X(t|\theta y) \\ &= \sum_y g(y) \, [G_X(t|\theta)]^y \end{aligned}$$

(vgl. (9.18)). Der letzte Ausdruck stellt wieder eine WEF dar, in der statt t eine ganze WEF steht. Es ist die WEF von Y mit dem Argument $G_X(t|\theta)$ statt t. Daher folgt

$$G_X(t) = G_Y \left[G_X(t|\theta)\right] . \tag{9.19}$$

Dies bedeutet praktisch, daß man *bei Verteilungen (von X), die die Bedingung (9.18) erfüllen, eine Zusammensetzung am leichtesten erhält, indem man in die WEF von Y anstelle von t die WEF von X einsetzt.* Zu diesen Verteilungen gehören beispielsweise die **Binomialverteilung** mit

$$f(x|ny) = \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x}$$

und

$$G_X(t|ny) = (q+pt)^{ny} = [(q+pt)^n]^y = [G_X(t|n)]^y;$$

die **Poisson-Verteilung** mit

$$f(x|\lambda y) = \frac{e^{-\lambda y}(\lambda y)^x}{x!}$$

und

$$G_X(t|\lambda y) = e^{-\lambda y(1-t)} = \left[e^{-\lambda(1-t)}\right]^y = [G_X(t|\lambda)]^y;$$

die **negative Binomialverteilung** mit

$$f(x|ky) = \binom{-ky}{x} (-P)^x Q^{-ky}$$

und

$$G_X(t|ky) = (Q-Pt)^{-ky} = \left[(Q-Pt)^{-k}\right]^y = [G_X(t|k)]^y.$$

Beispiel 9.3.4. Man zeige mit Hilfe der WEF, daß

$$\text{Poisson-V. } (\lambda y) \bigwedge_y \text{ Poisson-V. } (m)$$

eine Neyman-Verteilung darstellt.

Lösung: Auf der rechten Seite haben wir eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter m, deren WEF

$$G_Y(t) = e^{-m(1-t)} \tag{a}$$

ist, und auf der linken Seite ist

$$G_X(t|\lambda) = e^{-\lambda(1-t)}. \tag{b}$$

Setzt man (b) statt t in (a) ein, so bekommt man

$$G_X(t) = G_Y\left[G_X(t|\lambda)\right] = e^{-m\left[1-e^{-\lambda(1-t)}\right]},$$

worin man die WEF der Neyman-Verteilung erkennt [vgl. (6.27)]. •

Betrachten wir jetzt unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit der WF $f(x)$. Wir definieren eine neue Zufallsvariable

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

wobei n **nicht fest ist**, sondern die Werte einer Zufallsvariablen N darstellt, die selbst nach einem Zufallsgesetz $g(n)$ verteilt ist, d.h. wir haben eine neue WF

$$f(z|n) = f^{n*}(x).$$

Die Frage ist, wie man $f(z)$ bestimmt. Bildet man, wie üblich, die gemeinsame Verteilung von Z und N, d.h.

$$f(z,n) = f(z|n)g(n),$$

so ergibt sich

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(z|n)g(n) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(x)g(n).$$

Anstatt eine n-fache Faltung zu berechnen, stellen wir die WEF von Z mit Hilfe der WEF von X und N dar:

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_{z=0}^{\infty} t^z f(z) = \sum_{z=0}^{\infty} t^z \sum_{n=0}^{\infty} f(z|n) g(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \sum_{z=0}^{\infty} t^z f(z|n) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) G_Z(t|n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \left[G_{nX}(t|n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \left[G_X(t)\right]^n \\ &= G_N\left[G_X(t)\right]. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Der Schritt in der vorletzten Zeile der Ableitung erfolgt aufgrund von (9.10). Das Resultat entspricht (9.19). Daraus folgt praktisch, daß *bei n-maliger Faltung der Verteilung von X, wobei die Zahl der Faltungen der Verteilung g(n) folgt, t in der WEF von N durch die WEF von X ersetzt wird.* Man kann diese Zusammensetzung durch

$$f(x) \bigwedge_{n^*} g(n) \tag{9.21}$$

symbolisieren.

Beispiel 9.3.5. Sei X Null-Eins-verteilt, d.h.

$$f(x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

Man bestimme die Verteilung der n-maligen Faltung von $f(x)$, wenn N Poisson-verteilt ist.

Lösung: Für die Poisson-Verteilung gilt

$$G_N(t) = e^{-\lambda(1-t)}$$

und für die Null-Eins-Verteilung

$$G_X(t) = q + pt.$$

Daraus folgt

$$G_N\left[G_X(t)\right] = e^{-\lambda(1-q-pt)} = e^{-p\lambda(1-t)};$$

dies ist die WEF der "zusammengesetzten Binomialverteilung", die wir in (9.16) abgeleitet haben (vgl. Übung 9.3.4). •

Ähnlich verfährt man bei einer bestimmten Art der **Verallgemeinerung** von Verteilungen, wobei die WEF einer Verteilung anstelle von t in die WEF einer anderen Verteilung eingesetzt wird. Symbolisch bezeichnet man diese Prozedur mit

$$f(y) \bigvee g(x) \tag{9.22}$$

wobei $G_X(t)$ in $G_Y(t)$ eingesetzt wird:

$$G_Y\left[G_X(t)\right].$$

Man sieht sofort, daß diese Verallgemeinerung mit der Faltung in (9.20) und (9.21), und bei Erfüllung der Bedingung (9.18) mit der Zusammensetzung identisch ist.

Beispiel 9.3.6. Man bestimme die Verteilung von

$$\text{Poisson-V. } (\lambda) \bigvee \text{Logarithmische V. } (q).$$

Lösung: Es ist

$$G_Y(t) = e^{-\lambda(1-t)} \quad \text{und} \quad G_X(t) = \frac{\ln(1-qt)}{\ln(1-q)},$$

so daß gilt:

$$
\begin{aligned}
G_Y[G_X(t)] &= e^{-\lambda\left[1-\frac{\ln(1-qt)}{\ln(1-q)}\right]} = e^{-\lambda} e^{\frac{\lambda \ln(1-qt)}{\ln(1-q)}} \\
&= e^{-\lambda}\left[e^{\ln(1-qt)}\right]^{\frac{\lambda}{\ln(1-q)}} = e^{-\lambda}(1-qt)^{\frac{\lambda}{\ln(1-q)}} \\
&= \left[e^{-\ln(1-q)} - qte^{-\ln(1-q)}\right]^{\frac{\lambda}{\ln(1-q)}} \\
&= \left[(1-q)^{-1} - q(1-q)^{-1}t\right]^{\frac{\lambda}{\ln(1-q)}} \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p}t\right)^{\frac{\lambda}{\ln(1-q)}} = (Q-Pt)^{\frac{\lambda}{\ln(1-q)}}.
\end{aligned}
$$

Man bedenke bei dieser Ableitung, daß $e^{\ln x} = x$ gilt. Nach diesen Umformungen erkennt man leicht, daß der letzte Ausdruck die WEF einer negativen Binomialverteilung mit den Parametern $P = \frac{q}{p}$ und $k = \lambda[-\ln(1-q)]^{-1}$ darstellt. •

Beispiel 9.3.7. Man bestimme die Verteilung von

$$
\text{Poisson-V. }(m) \bigvee \left\{ \left[\text{Binomialv. } (n,\theta p) \bigwedge_n \text{Poisson-V. } (\lambda) \right] \bigwedge_p f(p)=1, 0<p<1 \right\},
$$

wobei die letzte Verteilung eine stetige Rechteckverteilung ist.

Lösung: Zur Verdeutlichung schreiben wir

$$
\frac{e^{-m}m^x}{x!} \bigvee \left\{ \left[\binom{n}{y}(\theta p)^y(1-\theta p)^{n-y} \bigwedge_n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \right] \bigwedge_p f(p) = 1, 0<p<1 \right\}.
$$

Man beginnt mit der Auswertung der eckigen Klammer. Die darin stehende Zusammensetzung ist uns aus (9.16) als eine "zusammengesetzte Binomialverteilung" bekannt, für die $G_Y(t|\theta\lambda) = e^{-\theta p\lambda(1-t)} =$

$[e^{-\theta\lambda(1-t)}]^p$ gilt (vgl. Beispiel 9.3.5). Die Zusammensetzung mit der Rechteckverteilung $f(p) = 1$ kann man auf zwei Arten bestimmen:

(a) Erst berechnet man die WEF der Rechteckverteilung als

$$
G_P(t) = \int_0^1 t^p dp = \left.\frac{t^p}{\ln t}\right|_0^1 = \frac{t-1}{\ln t},
$$

und in diesen Ausdruck setzt man $e^{-\theta\lambda(1-t)}$ statt t ein. So bekommt man

$$
\frac{e^{-\theta\lambda(1-t)} - 1}{\ln e^{-\theta\lambda(1-t)}} = \frac{e^{-\theta\lambda(1-t)} - 1}{-\theta\lambda(1-t)} = \frac{1 - e^{-\theta\lambda(1-t)}}{\theta\lambda(1-t)},
$$

was die WEF der Verteilung in den geschweiften Klammern darstellt.

(b) Da für die "zusammengesetzte Binomialverteilung" die Bedingung (9.18) gilt, kann man (9.19) benutzen. So erhält man direkt

$$
G_Z(t) = G_P\left[G_Y(t|\theta\lambda)\right] = \int_0^1 \left[e^{-\theta\lambda(1-t)}\right]^p f(p)dp = \frac{1 - e^{-\theta\lambda(1-t)}}{\theta\lambda(1-t)}.
$$

Die Verallgemeinerung ($\bigvee$) links erfolgt durch die Einsetzung dieser WEF in die der Poisson-Verteilung mit dem Parameter m, d.h. in $e^{-m(1-t)}$. Daraus ergibt sich dann

$$
G_X\left[G_Z(t)\right] = exp\left\{-m\left[1 - \frac{1 - e^{-\theta\lambda(1-t)}}{\theta\lambda(1-t)}\right]\right\} \tag{9.23}
$$

wobei $exp\{z\} = e^z$ gilt. Dies ist die WEF einer *Neyman-Verteilung Typ B*. Für die Überlegungen, die zu dieser Verteilung führen vgl. Neyman (1939), Feller (1943), Moran (1968:100), Johnson, Kotz (1969, I:227).

Übung 9.3.1. Man leite die MEF der "zusammengesetzten Binomialverteilung" ab (9.16).

Übung 9.3.2. Man zeige, daß

$$
\text{Hypergeometrische V. } (n, M, N) \bigwedge_M \text{Binomialv. } (N, p)
$$

eine Binomialverteilung mit den Parametern n, p ist.

Übung 9.3.3. Aus (9.23) berechne man P_0 und P_1.

Übung 9.3.4. (a) Man leite die WEF der Null-Eins-Verteilung ab (vgl. Beispiel (9.3.5). (b) Aus (9.16) leite man die WEF der "zusammengesetzten Binomialverteilung" ab.

9.4. Konvergenz

Durch die WEF wird eine Verteilung umkehrbar eindeutig bestimmt, d.h. zu jeder Verteilung gehört eine einzige WEF und umgekehrt. Daher ist anzunehmen, daß im Falle der Konvergenz einer Verteilung gegen eine andere auch ihre WEF gegen die WEF der anderen Verteilung konvergiert und umgekehrt. Diese Vermutung erweist sich in der Tat als richtig. Einen Beweis findet man z.B. in Feller (1957:262), Moran (1968) und Rényi (1966). Diese Tatsache erleichtert die Untersuchung der Konvergenz von Verteilungen, indem man sich auf die Konvergenz der WEF beschränkt.

Beispiel 9.4.1. In Abschnitt 2.1 haben wir gezeigt, daß für $n \to \infty$, $p \to 0$ und $np = \lambda$ die Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung konvergiert. Man zeige, daß dies auch für die WEF gilt.

Lösung: Die WEF der Binomialverteilung ist (vgl. Beispiel 9.1.3, Übung 9.1.2)

$$G_X(t) = (q + pt)^n.$$

Setzten wir $p = \lambda/n$ (aufgrund von $np = \lambda$) und berechnen den Grenzwert für $n \to \infty$, so wird

$$\lim_{n\to\infty} G_X(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}t\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{\lambda(1-t)}{n}\right]^n = e^{-\lambda(1-t)},$$

zur WEF der Poisson-Verteilung. •

Übung 9.4.1. (a) Man leite die WEF der in $x = 1$ gestutzten negativen Binomialverteilung mit den Parametern k, p ab. (b) Man zeige, daß diese WEF für $k \to 0$ gegen die WEF der logarithmischen Verteilung konvergiert.

Übung 9.4.2. (a) Man leite die WEF der in $x = 1$ gestutzten Binomialverteilung ab. (b) Man zeige, daß diese WEF für $n \to \infty$, $p \to 0$ und $np = \lambda$ gegen die WEF der in $x = 1$ gestutzten Poisson-Verteilung konvergiert. (c) Aus der resultierenden WEF rekonstruiere man P_0 und P_1.

Übung 9.4.3. Man zeige, daß die WEF der negativen Binomialverteilung gegen die WEF der Poisson-Verteilung konvergiert für $k \to \infty$, $P \to 0$, $kP = \lambda$.

Benutzte und weiterführende Literatur:

Feller (1943); Feller (1962), Johnson, Kotz (1969); Moran (1968); Neyman (1939); Patil, Wani (1966); Quenouille (1949); Rényi (1966); Wilks (1962).

Aufgaben

9.1. Seien folgende WEF gegeben:

(a) $p^k(1 - qt)^{-k}$

(b) $\dfrac{\ln(1 - qt)}{\ln(1 - q)}$

(c) $\dfrac{(1 + \theta t)e^{\theta t}}{(1 + \theta)e^{\theta}}$ (d) $p(1 - qt)^{-1}$

Man rekonstruiere die zugehörigen Verteilungen.

9.2. Eine WEF sei folgendermaßen gegeben

$$G_X(t) = e^{-m} e^{m e^{-\lambda} e^{\lambda t}}.$$

Man rekonstruiere P_0, P_1 und P_2.

9.3. Seien X und Y negativ binomial verteilt mit den Parametern k_1, P bzw. k_2, P. Man zeige, daß ihre Summe auch negativ binomial verteilt ist.

9.4. Man falte zwei identische logarithmische Verteilungen und zeige, daß die resultierende Verteilung nicht mehr logarithmisch ist, d.h. die logarithmische Verteilung ist nicht reproduktiv (die Faltung führt zu der selten gebrauchen *Stirling-Verteilung erster Art*, vgl. Patil, Wani (1965)).

9.5. (a) Man leite die WEF der 1-verschobenen Neyman-Verteilung ab.
(b) Man falte zwei 1-verschobene Neyman-Verteilungen mit den Parametern m_1, λ und m_2, λ.
(c) Man rekonstruiere P_0, P_1, P_2.

9.6. Man leite die WEF einer Null-Eins-Verteilung ab und zeige, daß ihre n-malige Faltung eine Binomialverteilung ergibt.

9.7. Man konstruiere $H_X(t)$ für die logarithmische Verteilung und berechne daraus $P(X \leq 2)$.

9.8. Sei $G_X(t)$ die WEF von X. Man leite ab (a) die WEF von $X + 10$, (b) von $10X$.

9.9. Im Beispiel 9.2.1 haben wir die WEF der Summe einer Poisson-verteilten (X) und einer geometrisch verteilten (Y) Zufallsvariablen abgeleitet. Es ergab sich

$$G_Z(t) = pe^{-\lambda}e^{\lambda t}(1 - qt)^{-1}.$$

(a) Man leite $f(z)$ durch direkte Addition der Wahrscheinlichkeitsfunktionen ab.
(b) Man zeige, daß $F(\infty) = 1$ ist.
(c) Man leite $G_Z(t)$ aus $f(z)$ ab.
(d) Aus $G_Z(t)$ berechne man $\mu_{(1)}$ und $\mu_{(2)}$.
(e) Man stelle die Rekursionsformel für P_{z+1} auf (d.h. man drücke P_{z+1} mit Hilfe von P_z aus).
(f) Man konstruiere die kumulative WEF $H_Z(t)$.

9.10. (a) Man bestimme die Verallgemeinerung die Binomialverteilung durch die logarithmische Verteilung, d.h.

$$\text{Binomialv. } (n, p) \bigvee \text{Logarithmische V. } (\theta).$$

(b) Man rekonstruiere P_0 und P_1.
(c) Man berechne μ_1' und μ_2'.

9.11. (a) Man verallgemeinere die negative Binomialverteilung durch die logarithmische Verteilung, d.h.

$$\text{Negative Binomialv. } (k, p) \bigvee \text{Logarithmische V. } (\theta).$$

(b) Man rekonstruiere P_0 und P_1.
(c) Man berechne μ_1' und μ_2'.

9.12. (a) Man verallgemeinere die logarithmische Verteilung durch sich selbst, d.h.

$$\text{Logarithmische V. } (q) \bigvee \text{Logarithmische V. } (\theta).$$

(b) Man rekonstruiere P_0 und P_1.
(c) Man berechne μ_1'.

9.13. Man zeige, daß die Verallgemeinerung

$$\text{Null-Eins-V. } (p) \bigvee \text{Logarithmische V. } (\theta)$$

eine modifizierte logarithmische Verteilung ergibt (vgl. Aufgabe 9.6).

9.14. (a) Man zeige, daß

$$\text{Binomialv. } (n, p) \bigwedge_n \text{Logarithmische V. } (\theta)$$

eine modifizerte logarithmische Verteilung mit den Parametern

$$\alpha = \frac{\ln(1 - q\theta)}{\ln(1 - \theta} \quad \text{und} \quad q' = \frac{p\theta}{1 - q\theta}$$

ergibt.
(b) Man zeige, daß $F(\infty) = 1$ gilt.

10. Zusammengesetzte und verallgemeinerte Verteilungen

Das Studium dieses Kapitels wird etwas langwieriger und kann daher bei der ersten Lektüre ausgelassen werden. Die verhältnismäßig ausführliche Behandlung einiger Verteilungen haben wir deswegen eingeschlossen, (1) weil in den Lehrbüchern diese Verteilungen meistens fehlen, (2) weil sie für die Bildung linguistischer Modelle von ganz großem Wert zu sein scheinen, (3) weil sie eine ausgezeichnete Übung beim Umgang mit Verteilungen darstellen. Die Kenntnis von Kapitel 9 ist für das Verständnis des Folgenden notwendig.

Man kann theoretisch jede Verteilung mit jeder anderen auf irgendeine Weise kombinieren. Für praktische Zwecke ist dies aber nicht immer sinnvoll, weil in einigen Fällen zu viele Parameter vorhanden sind oder zu komplizierte Formeln entstehen, wodurch die Anwendung beträchtlich erschwert wird. Eine kombinierte Verteilung, nämlich die Neyman-Verteilung Typ A, haben wir bereits ausführlich behandelt (vgl. Kap. 6). Hier werden wir eine Auswahl treffen und Einzelheiten sowie viele andere Verteilungen in den Übungen und Aufgaben behandeln. Der Hauptteil ist die Technik des Kombinierens und Rechnens mit diesen Verteilungen, die unterschiedlich ausführlich dargestellt wird.

Am wichtigsten erscheint uns die Kombination der Binomialverteilung mit einigen anderen zu sein, daher werden wir diesem Fall mehr Platz einräumen.

Im weiteren werden wir folgende Abkürzungen benutzen:

B – Binomialverteilung
G – Geometrische Verteilung
L – Logarithmische Verteilung
NB – Negative Binomialverteilung
Ne – Neyman-A-Verteilung
NE – Null-Eins-Verteilung
P – Poisson-Verteilung

10.1. Binomialverteilung

10.1.1. Binomialverteilung (n,p) $\bigwedge_n$ Binomialverteilung (m,p')

Wenn der Parameter n der Binomialverteilung selbst einer Binomialverteilung mit den Parametern m und p' folgt, dann ergibt sich die WF folgendermaßen

$$f(x) = \sum_{n=x}^{m} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \binom{m}{n} p'^n q'^{m-n}.$$

Man bedenke, daß hier $x \le n \le m$ gilt, denn sonst ist der ganze Ausdruck gleich 0. Multipliziert man die Summanden mit $(m-x)!/(m-x)!$, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=x}^{m} \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \frac{m!}{n!(m-n)!} p^x q^{n-x} p'^n q'^{m-n} \frac{(m-x)!}{(m-x)!} \\ &= \sum_{n=x}^{m} \frac{m!}{x!(m-x)!} \cdot \frac{(m-x)!}{(n-x)!(m-n)!} p^x q^{n-x} p'^n q'^{m-n} \\ &= \binom{m}{x} p^x p'^x \sum_{n=x}^{m} \binom{m-x}{n-x} (qp')^{n-x} q'^{m-n} \\ &= \binom{m}{x} (pp')^x (q'+qp')^{m-x}, \quad x = 0,1,\dots,m. \qquad (10.1) \end{aligned}$$

Die Summe in der vorletzten Zeile wurde schon oft berechnet. Man bekommt sie sofort, wenn man $m-x=t$ und $n-x=s$ setzt.

Das Resultat der Zusammensetzung ist wieder eine Binomialverteilung mit den Parametern m und pp', da $1-pp' = 1-(1-q)p' = 1-p'+qp' = q'+qp'$ gilt.

Die **Momente** und alle anderen Eigenschaften dieser Verteilung kann man aus den Momenten der üblichen Binomialverteilung (Abschnitt 1) erhalten, indem man die neuen Parameter anstelle von n und p einsetzt.

So ist z.B.

$$\mu_1' = mpp'$$
$$\mu_2 = mpp'(q' + qp').$$

Die **WEF** läßt interessante Zusammenhänge erkennen. Für $\sum f(x)t^x$ erhalten wir leicht

$$\begin{aligned} G_X(t) &= (q' + qp' + pp't)^m \\ &= [q' + p'(q + pt)]^m . \end{aligned} \tag{10.2}$$

Man sieht sofort, daß (10.2) eine Verallgemeinerung der Binomialverteilung mit den Parametern m, p' und mit $G_Y(t) = (q' + p't)^m$ durch eine Null-Eins-Verteilung mit dem Parameter p und $G_X(t) = q + pt$ darstellt. Weiter sieht man, daß (10.2) laut (9.20) und (9.21) nichts anderes als eine n-malige Faltung der Null-Eins-Verteilung ist, wobei die Zahl der Faltungen eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern m, p' ist. Daher folgt

$$\mathrm{B}(n,p) \bigwedge_n \mathrm{B}(m,p') \approx \mathrm{B}(m,p') \mathrm{V}\ \mathrm{NE}(p) \approx \mathrm{NE}(p) \bigwedge_{n^*} \mathrm{B}(m,p'),$$

wobei mit "$\approx$" die Identität von Verknüpfungen symbolisiert wird.

Übung 10.1.1. Man leite P_0, P_1, P_2 ab (a) aus (10.1); (b) aus (10.2).

Übung 10.1.2. Aus (10.2) leite man $\mu_{(r)}$ ab.

Übung 10.1.3. Man leite die WF und die WEF von $\mathrm{B}(n,p) \bigwedge_n \mathrm{B}(m,p)$ ab. [Der Parameter p ist in beiden Verteilungen identisch.]

10.1.2. Binomialverteilung (ny,p) $\bigwedge_y$ Binomialverteilung (m,p')

Laut (9.17) bis (9.19) erhalten wir die WEF

$$G_X(t) = [q' + p'(q + pt)^n]^m , \tag{10.3}$$

woran man sofort sieht, daß diese Zusammensetzung mit der verallgemeinerten Binomialverteilung

$$\mathrm{B}(m,p') \vee \mathrm{B}(n,p)$$

und mit der k-maligen Faltung einer Binomialverteilung mit den Parametern n, p (wobei k wieder einer Binomialverteilung mit den Parametern m, p' folgt) d.h. mit

$$\mathrm{B}(n,p) \bigwedge_{k^*} \mathrm{B}(m,p')$$

identisch ist. Die WF ergibt sich nach Definition als

$$f(x) = \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x} \binom{m}{y} p'^y q'^{m-y}, \quad x = 0,1,\ldots,nm. \tag{10.4}$$

Die Verteilung hat die vier Parameter n, m, p, p' und ist für Anwendungen nicht sehr reizvoll. Im speziellen Fall $n = 1$ wird (10.4) zu (10.1).

Beispiel 10.1.1. (a) Man stelle die WF und die WEF der Zusammensetzung

$$\mathrm{B}(ny,p) \bigwedge_y \mathrm{B}(n,p).$$

auf.

(b) Man leite P_0 und P_1 aus der WEF und P_2 aus $f(x)$ ab.

Lösung: (a) Da die Parameter gleich sind, bekommen wir nach (10.4):

$$f(x) = \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x} \binom{n}{y} p^y q^{n-y}$$
$$= \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \binom{ny}{x} \binom{n}{y} p^{x+y} q^{n+ny-x-y}, \quad x = 0, 1, \ldots, n^2;$$

und

$$G_X(t) = [q + p(q + pt)^n]^n .$$

(b) Aus der WEF folgt

$$P_0 = [q + pq^n]^n$$
$$P_1 = G'_X(0) = n^2 p^2 q^{n-1} (q + pq^n)^{n-1} .$$

Die direkte Berechnung von P_2 aus $f(x)$ ist ziemlich langwierig. Wir stellen sie daher ausführlich dar:

$$P_2 = \sum_{y \geq \frac{2}{n}} \binom{ny}{2} \binom{n}{y} p^{2+y} q^{n+ny-2-y}$$
$$= p^2 q^{-2} \sum_{y=1}^{n} \frac{ny(ny-1)}{2} \binom{n}{y} (pq^n)^y q^{n-y}$$
$$= \frac{p^2 q^{-2}}{2} \sum_{y=1}^{n} n^2 y^2 \binom{n}{y} (pq^n)^y q^{n-y} - \frac{p^2 q^{-2}}{2} \sum_{y=1}^{n} ny \binom{n}{y} (pq^n)^y q^{n-y}$$

$$= \frac{n^2 p^2 q^{-2}}{2} \sum_{y=1}^{n} [y(y-1) + y] \binom{n}{y} (pq^n)^y q^{n-y} -$$
$$- \frac{np^2 q^{-2}}{2} \sum_{y=1}^{n} y \binom{n}{y} (pq^n)^y q^{n-y}$$
$$= \frac{n^2 p^2 q^{-2}}{2} \left[\sum_{y=1}^{n} y(y-1) \binom{n}{y} (pq^n)^y q^{n-y} + \sum_{y=1}^{n} y \binom{n}{y} (pq^n)^y q^{n-y} \right] -$$
$$- \frac{np^2 q^{-2}}{2} \sum_{y=1}^{n} y \binom{n}{y} (pq^n)^y q^{n-y}$$
$$= \frac{n^2 p^2 q^{-2}}{2} \left[n(n-1)(pq^n)^2 \sum_{y=2}^{n} \binom{n-2}{y-2} (pq^n)^{y-2} q^{n-y} + \right.$$
$$\left. + npq^n \sum_{y=1}^{n} \binom{n-1}{y-1} (pq^n)^{y-1} q^{n-y} \right] -$$
$$- \frac{np^2 q^{-2}}{2} npq^n \sum_{y=1}^{n} \binom{n-1}{y-1} (pq^n)^{y-1} q^{n-y}$$
$$= \left[n^2 p^2 q^{-2} n(n-1) p^2 q^{2n} (q + pq^n)^{n-2} + n^2 p^2 q^{-2} npq^n (q + pq^n)^{n-1} - \right.$$
$$\left. - np^2 q^{-2} npq^n (q + pq^n)^{n-1} \right] / 2$$
$$= \frac{n^2 p^2}{2q^2} pq^n (q + pq^n)^{n-2} [n(n-1)pq^n + n(q + pq^n) - (q + pq^n)]$$
$$= \frac{n^2 p^3}{2} (n-1) q^{n-1} (q + pq^n)^{n-2} [1 + (n+1)pq^{n-1}] . \bullet$$

Eine effizientere Rechenmethode werden wir später einführen.

Übung 10.1.4. Man berechne μ'_1 und μ_2 (a) aus der WEF (10.3), (b) aus der WEF im Beispiel 10.1.1.

10.1.3. Binomialverteilung (n,p) $\bigwedge_n$ Poisson-Verteilung (λ)

Diese Zusammensetzung haben wir schon im Beispiel 9.3.1 abgeleitet. Laut (9.16) ergab sich

$$f(x) = \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

d.h. eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter $p\lambda$.

Die WEF haben wir durch Faltung einer Null-Eins-Verteilung im Beispiel 9.3.5. als

$$G_X(t) = e^{-p\lambda(1-t)} \tag{10.5}$$

abgeleitet, da diese Zusammensetzung mit

$$NE(p) \bigwedge_{n^*} P(\lambda)$$

und gleichzeitig mit

$$P(\lambda) \vee NE(p)$$

identisch ist. In der Übung 9.3.1. wurde die MEF abgeleitet.

Beispiel 10.1.2. Man zeige, daß die Zusammensetzung

$$B(n,p) \bigwedge_n B(m,p') \quad \text{gegen die} \quad B(n,p) \bigwedge_n P(\lambda)$$

konvergiert, wenn $m \to \infty$, $p' \to 0$, $mp' = \lambda$ gilt.

Lösung: Wir benutzen einfach die WEF der ersten Verteilung, die in (10.2) gegeben ist. Wegen $p' = \frac{\lambda}{m}$ gilt

$$\lim_{m\to\infty} [q' + p'(q+pt)]^m = \lim_{m\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{m}(q+pt)\right]^m =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda(1-q-pt)}{m}\right]^m = e^{-p\lambda(1-t)},$$

was (10.5) entspricht. •

Übung 10.1.5. Man leite die Rekursionsformel für P_{x+1} der Verteilung in (9.16) ab.

10.1.4. Binomialverteilung (ny,p) $\bigwedge_y$ Poisson-Verteilung (λ)

Die WEF ergibt sich, da die Bedingung (9.18) erfüllt ist, durch Einsetzung der WEF der Binomialverteilung in die der Poissonverteilung, d.h.

$$G_X(t) = e^{-\lambda[1-(q+pt)^n]} = e^{\lambda[(q+pt)^n-1]} \tag{10.6}$$

Diese Verteilung hat die drei Parameter n, p, λ und wird oft als **Poisson-Binomialverteilung** bezeichnet. In der Literatur wurde sie öfter untersucht (vgl. McGuire & Brindley & Bancroft 1947; Skellam 1952; Sprott 1958; Shumway & Gurland 1960a,b; Katti & Gurland 1962; Kemp & Kemp 1965).

Im Spezialfall mit $n = 1$ ergibt sich

$$P(\lambda) \vee NE(p) \approx NE(p) \bigwedge_{n^*} P(\lambda)$$

(vgl. Abschnitt 10.1.3). Für $n = 2$ erhält man die sogenannte **Hermitsche Verteilung** (vgl. Kemp, Kemp 1965).

Die WF der Poisson-Binomialverteilung ergibt sich laut Definition als

$$f(x) = \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} =$$
$$= \left(\frac{p}{q}\right)^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{y \geq \frac{x}{n}} (ny)_{(x)} \frac{(\lambda q^n)^y}{y!}, \quad x = 0, 1, \ldots, ny \tag{10.7}$$

Beispiel 10.1.3. Man zeige, daß $\sum_x f(x)$ von (10.7) gleich 1 ist.

Lösung:

$$\sum f(x) = \sum_{x=0}^{ny} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$$
$$= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \underbrace{\sum_{x=0}^{ny} \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x}}_{=1}$$
$$= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Die Einführung der **Stirling-Zahlen der ersten Art** an dieser Stelle wird uns bei weiteren Rechnungen sehr behilflich sein. In Abschnitt 6.2 haben wir festgestellt, daß man eine Potenz auch faktoriell darstellen kann, nämlich als

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} Z(n,k) x_{(k)}, \tag{10.8}$$

wobei die $Z(n,k)$ die Stirling-Zahlen der zweiten Art bezeichneten (Tabelle 2, Anhang). Umgekehrt kann man die faktoriellen Ausdrücke $x_{(n)}$ mit Hilfe von Potenzen darstellen. Es ist beispielsweise

$$x_{(2)} = x(x-1) = x^2 - x$$
$$x_{(3)} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$x_{(4)} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

usw., wobei die Koeffizienten von x^k die Stirling-Zahlen der ersten Art sind. Man findet sie in der Tabelle 1 des Anhangs. Wir wählen hier die Bezeichnung

$$x_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) x^k. \tag{10.9}$$

Beispiel 10.1.4. Man drücke $x_{(5)}$ in Form von Potenzen aus.

Lösung: Mit Hilfe der Tabelle 1 ergibt sich sofort

$$x_{(5)} = 24x - 50x^2 + 35x^3 - 10x^4 + x^5. \bullet$$

Mit Hilfe von Stirling-Zahlen läßt sich die WF (10.7) auf eine zwar kompliziert aussehende, jedoch rechnerisch sehr zweckmäßige Form überführen. Wir haben laut (10.7)

$$f(x) = \left(\frac{p}{q}\right)^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{y \geq \frac{x}{n}} (ny)_{(x)} \frac{(\lambda q^n)^y}{y!} = C \sum_{y \geq \frac{x}{n}} (ny)_{(x)} \frac{(\lambda q^n)^y}{y!},$$

wobei wir den konstanten Faktor vor der Summe mit C bezeichnet haben. Um n aus $(ny)_{(x)}$ ausklammern zu können, benutzen wir (10.9) und schreiben

$$f(x) = C \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \sum_{k=1}^{x} S(x,k)(ny)^k \frac{(\lambda q^n)^y}{y!}$$
$$= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \frac{y^k (\lambda q^n)^y}{y!}.$$

Um nun y^k und $y!$ kürzen zu können, verwenden wir (10.8) und erhalten

$$f(x) = C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) y_{(j)} \frac{(\lambda q^n)^y}{y!}$$
$$= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) (\lambda q^n)^j \sum_{y=j}^{\infty} \frac{(\lambda q^n)^{y-j}}{(y-j)!},$$

Die letzte Summe ergibt bekanntlich $e^{\lambda q^n}$, so daß schließlich

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda(1-q^n)}, & x = 0 \\ \left(\frac{p}{q}\right)^x \frac{e^{-\lambda} e^{\lambda q^n}}{x!} \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) (\lambda q^n)^j, & x = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{10.10}$$

gilt.

Zur Berechnung einzelner Wahrscheinlichkeiten mit (10.10) braucht man lediglich die Stirling-Zahlen einzusetzen. Man kann dadurch die langwierige Ableitung der WEF vermeiden.

Beispiel 10.1.5. Man berechne P_5 der Poisson-Binomialverteilung mit Hilfe von (10.10).

Lösung: Setzt man $\lambda q^n = c$, so folgt durch Einsetzung von Stirling-Zahlen beider Arten

$$\begin{aligned} P_5 = \left(\frac{p}{q}\right)^5 \frac{e^{-\lambda} e^c}{5!} \{ & S(5,1) n^1 \left[Z(5,1)c^1\right] + \\ & + S(5,2) n^2 \left[Z(2,1)c^1 + Z(2,2)c^2\right] + \\ & + S(5,3) n^3 \left[Z(3,1)c^1 + Z(3,2)c^2 + Z(3,3)c^3\right] + \\ & + S(5,4) n^4 \left[Z(4,1)c^1 + Z(4,2)c^2 + Z(4,3)c^3 + Z(4,4)c^4\right] + \\ & + S(5,5) n^5 \left[Z(5,1)c^1 + Z(5,2)c^2 + Z(5,3)c^3 + Z(5,4)c^4 + \right. \\ & \left. + Z(5,5)c^5\right] \} \\ = \left(\frac{p}{q}\right)^5 \frac{e^{-\lambda} e^c}{5!} & \left[24nc - 50n^2 \left(c + c^2\right) + 35n^3 \left(c + 3c^2 + c^3\right) - \right. \\ & \left. -10n^4 \left(c + 7c^2 + 6c^3 + c^4\right) + n^5 \left(c + 15c^2 + 25c^3 + 10c^4 + c^5\right)\right] . \bullet \end{aligned}$$

Die Momente lassen sich schneller aus der WEF ableiten. So erhalten wir aus (10.6):

$$\begin{aligned} \mu_1' &= np\lambda \\ \mu_2 &= np\lambda(q + np). \end{aligned} \tag{10.11}$$

Wenn der Parameter n bekannt ist, dann kann man p und λ mit Hilfe von $\bar{x}$ und S^2 folgendermaßen schätzen:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{S^2 - \bar{x}}{\bar{x}(n-1)} \\ \hat{\lambda} &= \frac{\bar{x}}{n\hat{p}}. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Eine andere Methode wird in Aufgabe 10.9 gezeigt.

Übung 10.1.6. Man zeige, daß die Anfangsmomente der Poisson-Binomialverteilung folgendermaßen berechnet werden können:

$$\mu_r' = \sum_{k=1}^{r} Z(r,k) p^k \sum_{j=1}^{k} S(k,j) n^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) \lambda^i \tag{10.13}$$

Übung 10.1.7. Aus (10.13) berechne man μ_2', μ_3' und μ_4'.

10.1.5. Binomialverteilung (n,p) $\bigvee$ Poisson-Verteilung (λ)

Wie aus der Definition der Verallgemeinerung folgt, entsteht die WEF dieser Verteilung so, daß man statt t in der WEF der Binomialverteilung die WEF der Poisson-Verteilung einsetzt, d.h.

$$G_X(t) = \left[q + pe^{-\lambda(1-t)}\right]^n. \tag{10.14}$$

Wie man sofort sieht, ist dies identisch mit der Zusammensetzung

$$P(\lambda y) \bigwedge_y B(n,p).$$

Die WF ergibt sich nach Definition als

$$f(x) = \sum_{y=0}^{n} \frac{e^{-\lambda y} (\lambda y)^x}{x!} \binom{n}{y} p^y q^{n-y}, \quad x = 0, 1, \ldots \tag{10.15}$$

Verwendet man die Stirling-Zahlen, so läßt sich (10.15) einfacher ausdrücken. Durch Umordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda^x}{x!}\sum_{y=0}^{n} y^x \binom{n}{y} \left(pe^{-\lambda}\right)^y q^{n-y} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!}\sum_{y=0}^{n}\sum_{k=1}^{x} Z(x,k) y_{(k)} \binom{n}{y} \left(pe^{-\lambda}\right)^y q^{n-y} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!}\sum_{k=1}^{x} Z(x,k) n_{(k)} \left(pe^{-\lambda}\right)^k \sum_{y=k}^{n} \binom{n-k}{y-k} \left(pe^{-\lambda}\right)^{y-k} q^{n-y} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!}\sum_{k=1}^{x} Z(x,k) n_{(k)} \left(pe^{-\lambda}\right)^k \left(q+pe^{-\lambda}\right)^{n-k} \qquad (10.16a) \\ &= \frac{\lambda^x \left(q+pe^{-\lambda}\right)^n}{x!}\sum_{k=1}^{x} Z(x,k) n_{(k)} \left(\frac{pe^{-\lambda}}{q+pe^{-\lambda}}\right)^k, \quad x = 1,2,\ldots \qquad (10.16b) \end{aligned}$$

und $P_0 = \left(q+pe^{-\lambda}\right)^n$.

Beispiel 10.1.6. Man berechne P_0 bis P_4 der Verteilung (10.15).

Lösung: Man setze

$$\frac{pe^{-\lambda}}{q+pe^{-\lambda}} = c; \quad q+pe^{-\lambda} = b.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} P_0 &= b^n \\ P_1 &= \lambda b^n nc \\ P_2 &= \frac{\lambda^2 b^n}{2!}\left[nc + n(n-1)c^2\right] \\ P_3 &= \frac{\lambda^3 b^n}{3!}\left[nc + 3n(n-1)c^2 + n(n-1)(n-2)c^3\right] \\ P_4 &= \frac{\lambda^4 b^n}{4!}\left[nc + 7n(n-1)c^2 + 6n(n-1)(n-2)c^3 + \right. \\ &\quad \left. + n(n-1)(n-2)(n-3)c^4\right]. \bullet \end{aligned}$$

Die **Anfangsmomente** ergeben sich als

$$\mu'_r = \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)\lambda^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) n_{(j)} p^j, \qquad (10.17)$$

was der Leser in der Übung 10.1.8. nachweisen soll. Verwendet man die Abkürzung

$$\mu'_1 = \lambda np \qquad (10.18)$$

so ergeben sich die **Zentralmomente** (z.B. mit Hilfe von (10.17)) als

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu'_1(1+\lambda q) \\ \mu_3 &= \mu'_1\left[1 + 3\lambda q + \lambda^2 q(q-p)\right] \qquad (10.19) \\ \mu_4 &= \mu'_1\left[1 + 7\lambda q + 3\mu'_1(1+\lambda q)^2 + 6\lambda^2 q(q-p) + \lambda^3 q(1-6pq)\right]. \end{aligned}$$

Wenn n bekannt ist, kann man die Parameter p und λ mit Hilfe von μ'_1 und μ_2 folgendermaßen schätzen:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{\bar{x}^2}{n\left(S^2 - \bar{x}\right) + \bar{x}^2} \\ \hat{\lambda} &= \frac{\bar{x}}{n\hat{p}}. \qquad (10.20) \end{aligned}$$

Übung 10.1.8. Man leite Formel (10.17) ab.

Übung 10.1.9. Man leite μ_1' und μ_2' aus (10.17) ab.

10.1.6. Binomialv. (n,p) $\bigwedge_n$ Geometrische V. (p')

Die WF ergibt sich laut Definition als

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} p' q'^n \\ &= \frac{p'(pq')^x}{x!} \sum_n n_{(x)} (qq')^{n-x}. \end{aligned}$$

Wegen

$$n_{(x)}(qq')^{n-x} = \frac{d^x\left[(qq')^n\right]}{d(qq')^x}$$

folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{p'(pq')^x}{x!} \frac{d^x}{d(qq')^x} \sum_n (qq')^n \\ &= \frac{p'(pq')^x}{x!} \frac{d^x}{d(qq')^x} \left[\frac{1}{1-qq'}\right] \\ &= \frac{p'(pq')^x}{x!} \cdot x!(1-qq')^{-(x+1)} \\ &= \frac{p'}{1-qq'} \cdot \left(\frac{pq'}{1-qq'}\right)^x, \quad x = 0, 1, \ldots \qquad (10.21) \end{aligned}$$

Dies ist eine **geometrische Verteilung** mit dem Parameter $p'/(1-qq')$. Für die WEF gilt

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{p'}{1-qq'} \left(\frac{pq't}{1-qq'}\right)^x = p'(1-qq'-pq't)^{-1} \\ &= p'\left[1-q'(q+pt)\right]^{-1}, \qquad (10.22) \end{aligned}$$

woraus folgt, daß (10.21) identisch mit

$$G(p') \vee NE(p)$$

ist.

Die Momente μ_1' und μ_2 ergeben sich aus der WEF als

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{pq'}{p'} \\ \mu_2 &= \frac{pq'(1-qq')}{p'^2}. \end{aligned} \qquad (10.23)$$

Übung 10.1.10. Man zeige, daß für die Verteilung (10.21) $F(\infty) = 1$ gilt.

Übung 10.1.11. Man zeige, daß für (10.21) $\mu_1' = (1-P_0)/P_0$ ist.

10.1.7. Binomialv. (ny,p) $\bigwedge_y$ Geometrische V. (p')

Die WEF dieser Verteilung ergibt sich durch einfache Einsetzung als

$$G_X(t) = p'\left[1-q'(q+pt)^n\right]^{-1} \qquad (10.24)$$

Die Verteilung läßt sich somit auch in der Form

$$G(p') \vee B(n,p)$$

bzw. als k-malige Faltung der Binomialverteilung, wobei k geometrisch verteilt ist, darstellen:

$$B(n,p) \bigwedge_{k*} G(p').$$

Die WF ist laut Definition

$$f(x) = \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x} p' q'^y, \quad x = 0, 1, \ldots, ny. \tag{10.25}$$

Diese Formel läßt sich für Rechenzwecke etwas umformen. Es ist

$$P_x = \sum_y \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x} p' q'^y =$$
$$= \frac{p'}{x!} \left(\frac{p}{q}\right)^x \sum_y (ny)_{(x)} (q'q^n)^y .$$

Mit der Bezeichung

$$C := \frac{p'}{x!} \left(\frac{p}{x}\right)^x$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}
P_x &= C \sum_y \sum_{k=1}^{x} S(x,k)(ny)^k (q'q^n)^y \\
&= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_y y^k (q'q^n)^y \\
&= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_y \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) y_{(j)} (q'q^n)^y \\
&= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) (q'q^n)^j \sum_y y_{(j)} (q'q^n)^{y-j} \\
&= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) (q'q^n)^j \frac{d^j}{d(q'q^n)^j} \sum_y (q'q^n)^y \\
&= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) (q'q^n)^j \frac{d^j}{d(q'q^n)^j} \left[\frac{1}{1-q'q^n}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) (q'q^n)^j\, j!\, (1-q'q^n)^{-(j+1)} \\
&= \frac{p'}{x!\,(1-q'q^n)} \left(\frac{p}{q}\right)^x \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) j! \left(\frac{q'q^n}{1-q'q^n}\right)^j
\end{aligned} \tag{10.26}$$

Beispiel 10.1.7. Aus (10.26) berechne man P_0, P_1, P_2.

Lösung:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{p'}{1-q'q^n} \\
P_1 &= \frac{p'}{1-q'q^n} \cdot \frac{p}{q} \cdot n \cdot \frac{q'q^n}{1-q'q^n} = \frac{npq^{n-1}p'q'}{(1-q'q^n)^2} \\
P_2 &= \frac{p'}{2\,(1-q'q^n)} \cdot \frac{p^2}{q^2} \left\{ -n \frac{q'q^n}{1-q'q^n} + n^2 \left[\frac{q'q^n}{1-q'q^n} + 2\left(\frac{q'q^n}{1-q'q^n}\right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{np^2q^{n-2}p'q' \left(n + \dfrac{2nq'q^n}{1-q'q^n} - 1\right)}{2\,(1-q'q^n)^2} . \bullet
\end{aligned}$$

Die **faktoriellen Momente** ergeben sich folgendermaßen (vgl. Übung 10.1.13):

$$\mu_{(r)} = p^r \sum_{k=1}^{r} S(r,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) j! \left(\frac{q'}{p'}\right)^j . \tag{10.27}$$

Beispiel 10.1.8. Aus (10.27) berechne man $\mu_{(1)}$ und $\mu_{(2)}$.

Lösung:

$$\mu_{(1)} = \frac{npq'}{p'}$$
$$\mu_{(2)} = p^2\left[-n\frac{q'}{p'} + n^2\left(\frac{q'}{p'} + \frac{2q'^2}{p'^2}\right)\right] \tag{10.28}$$
$$= \frac{np^2q'\left[n(1+q') - p'\right]}{p'^2}. \bullet$$

Wenn n bekannt ist, dann kann man die Parameter p und p' schätzen als

$$(a)\quad \hat{p} = 1 - \left(\frac{\hat{P}_1}{\bar{x}\hat{P}_0^2}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{10.29}$$
$$\hat{p}' = \frac{n\hat{p}}{\bar{x} + n\hat{p}}$$

oder

$$(b)\quad \hat{p} = \frac{S^2 - \bar{x}^2 - \bar{x}}{\bar{x}(n-1)} \tag{10.30}$$
$$\hat{p}' = \frac{n\hat{p}}{\bar{x} + n\hat{p}}$$

Übung 10.1.12. Man leite (10.24) direkt aus (10.25) ab.

Übung 10.1.13. Man leite die Formel (10.27) ab. [Man beachte, daß

$$\sum_y y_{(j)}q'^{y-j} = \sum_y \frac{d^j\left(q'^y\right)}{dq'^j} = \frac{d^j}{dq'^j}\sum_{y=0}^{\infty} q'^y = \frac{d^j}{dq'^j}\left(\frac{1}{1-q'}\right) =$$
$$= j!(1-q')^{-(j+1)}$$

gilt].

Übung 10.1.14. Man berechne μ_2 der Verteilung (10.25).

10.1.8. Binomialv. (n,p) $\bigvee$ Geometrische V. (p')

Diese Verallgemeinerung bereitet etwas mehr Schwierigkeiten als die bisherigen. Die WEF lautet

$$G_X(t) = \left[q + pp'(1-q't)^{-1}\right]^n. \tag{10.31}$$

Durch sukzessives Ableiten ergibt sich dann

$$f(x) = \begin{cases} (q+pp')^n, & x = 0 \\ q'^x \sum_{y=1}^{x} \binom{x-1}{y-1}\binom{n}{y}(pp')^y(q+pp')^{n-y}, & x = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{10.32}$$

Beispiel 10.1.9. Man berechne P_1 der Verteilung (10.32) sowohl aus der WF als auch aus der WEF.

Lösung: Aus $f(x)$ ergibt sich:

$$P_1 = q'^1 \sum_{y=1}^{1}\binom{1-1}{1-1}\binom{n}{1}(pp')^1(q+pp')^{n-1} = npp'q'(q+pp')^{n-1}.$$

Aus der WEF ergibt sich

$$G_X(0) = P_0 = (q+pp')^n$$
$$G'_X(t) = n\left[q + pp'(1-q't)^{-1}\right]^{n-1}\left[pp'(1-q't)^{-2}q'\right],$$

woraus

$$G'_X(0) = P_1 = npp'q'(q+pp')^{n-1}$$

folgt. •

Beispiel 10.1.10. Man zeige, daß für (10.32) $F(\infty) = 1$ ist.

Lösung:

$$F(\infty) = \sum_{x=y}^{\infty}\sum_{y=0}^{n} q'^x \binom{x-1}{y-1}\binom{n}{y}(pp')^y(q+pp')^{n-y}$$
$$= \sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}(pp')^y(q+pp')^{n-y}\sum_{x=y}^{\infty}\binom{x-1}{y-1}q'^x.$$

Es ist lehrreich zu zeigen, wie man die letzte Summe berechnet. Man setze $x = y + k$, wobei $k = 0, 1, \ldots$, so daß gilt:

$$\sum_{x=y}^{\infty}\binom{x-1}{y-1}q'^x = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{y+k-1}{y-1}q'^{y+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{y+k-1}{k}q'^{y+k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-y}{k}q'^y(-q')^k = q'^y(1-q')^{-y} = \left(\frac{q'}{p'}\right)^y. \tag{10.33}$$

Setzt man dieses Resultat wieder oben ein, so folgt

$$F(\infty) = \sum_{y=0}^{\infty}\binom{n}{y}(pp')^y(q+pp')^{n-y}\left(\frac{q'}{p'}\right)^y$$
$$= \sum_{y=0}^{\infty}\binom{n}{y}(pq')^y(q+pp')^{n-y}$$
$$= (q+pp'+pq')^n = [q+p(p'+q')]^n = 1.\bullet$$

Beispiel 10.1.11. Man leite die Zusammensetzung

$$NB(ky, p') \bigwedge_y B(n, p).$$

ab. Man setze $k = 1$ und zeige, daß sie mit (10.32) identische Resultate liefert.

Lösung: Laut Definition ist

$$f(x) = \sum_y \binom{ky+x-1}{x} p'^{ky} q'^x \binom{n}{y} p^y q^{n-y}, \quad x = 0, 1, \ldots.$$

Setzt man hier $k = 1$, so ergibt sich

$$f(x) = \sum_y \binom{y+x-1}{x}(pp')^y q'^x \binom{n}{y} q^{n-y} \tag{10.34}$$
$$= \frac{q'^x}{x!}\sum_{y=1}^{n} y(y+1)(y+2)\ldots(y+x-1)\binom{n}{y}(pp')^y q^{n-y}.$$

Den steigenden faktoriellen Ausdruck $y(y+1)\ldots(y+x-1) = y^{(x)}$ kann man auch mit Hilfe der Stirling-Zahlen der ersten Art (und Potenzen von y) ausdrücken, indem man alle Vorzeichen als positiv annimmt, d.h.

$$y(y+1)\ldots(y+x-1) = \sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|y^j.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (10.34) ein, so folgt

$$f(x) = \frac{q'^x}{x!}\sum_{y=1}^{n}\sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|y^j\binom{n}{y}(pp')^y q^{n-y}$$
$$= \frac{q'^x}{x!}\sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|\sum_{y=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)y_{(i)}\binom{n}{y}(pp')^y q^{n-y}$$
$$= \frac{q'^x}{x!}\sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)n_{(i)}(pp')^i\sum_{y=1}^{n}\binom{n-i}{y-i}(pp')^{y-i}q^{n-y}$$

$$= \frac{q'^x}{x!}\sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)n_{(i)}(pp')^i(q+pp')^{n-i}$$

$$= \frac{q'^x(q+pp')^n}{x!}\sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)n_{(i)}\left(\frac{pp'}{q+pp'}\right)^i, \quad x=1,2,\ldots \tag{10.35}$$

und $f(0)=(q+pp')^n$.

Diese Formel liefert mit (10.32) identische Resultate. Wir berechnen z.B.

$$P_1 = q'(q+pp')^n n\left(\frac{pp'}{q+pp'}\right) = npp'q'(q+pp')^{n-1}$$

usw. wie im Beispiel 10.1.9. •

Die **faktoriellen Momente** ergeben sich mittels einfacher, aber langwieriger Algebra (vgl. Aufgabe 10.14) zu

$$\mu_{(r)} = \left(\frac{q'}{p'}\right)^r\sum_{j=1}^{r}|S(r,j)|\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)n_{(i)}p^i. \tag{10.36}$$

Beispiel 10.1.12. Man berechne $\mu_{(1)}$ und $\mu_{(2)}$.

Lösung:

$$\mu_{(1)} = \frac{q'}{p'}np = \frac{npq'}{p'}$$

$$\mu_{(2)} = \left(\frac{q'}{p'}\right)^2\left\{np+\left[np+n(n-1)p^2\right]\right\} = \frac{npq'^2(np+q+1)}{p'^2}. \bullet$$

Benutzt man μ_1' und μ_2, so kann man – falls n bekannt ist – die beiden Parameter folgendermaßen schätzen:

$$\hat{p} = \frac{2\bar{x}^2}{n(S^2-\bar{x})+\bar{x}^2}$$

$$\hat{p}' = \frac{2n\bar{x}}{n(S^2+2\bar{x})+\bar{x}^2} \tag{10.37}$$

Übung 10.1.15. Man leite P_4 sowohl aus (10.32) als auch aus (10.35) ab und vergleiche die Resultate.

Übung 10.1.16. Man versuche, (10.32) aus (10.31) abzuleiten.

Übung 10.1.17. Man zeige, daß für die Varianz der Verteilung (10.32) gilt:

$$\mu_2 = npq'(1+qq')/p'^2$$

10.1.9. Binomialv. (n,p) $\bigwedge_n$ Logarithmische V. (θ)

Laut Definition gilt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\frac{A\theta^n}{n}, \quad x=0,1,\ldots,n$$

mit

$$A = \frac{1}{-\ln(1-\theta)}$$

(vgl. (8.3)). Da die logarithmische Verteilung nur für $n = 1, 2, \ldots$ definiert ist, ergibt sich

$$P_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{0}p^0q^{n-0}\frac{A\theta^n}{n} = A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q\theta)^n}{n} = -A\ln(1-q\theta) =$$
$$= \frac{\ln(1-q\theta)}{\ln(1-\theta)}$$

und

$$P_x = \frac{A}{x}\left(\frac{p}{q}\right)^x\sum_{n=x}^{\infty}\binom{n-1}{x-1}(q\theta)^n = \frac{A}{x}\left(\frac{p}{q}\right)^x\left(\frac{q\theta}{1-q\theta}\right)^x$$
$$= \frac{A}{x}\left(\frac{p\theta}{1-q\theta}\right)^x,$$

für $x = 1, \ldots, n$, also

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-q\theta)}{\ln(1-\theta)}, & x = 0 \\ \dfrac{A}{x}\left(\dfrac{p\theta}{1-q\theta}\right)^x, & x = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{10.38}$$

worin wir eine **modifizierte logarithmische Verteilung** mit dem Parameter $p\theta/(1-q\theta)$ erkennen. Der Nachweis, daß $F(\infty) = 1$ gilt, soll in der Übung 10.1.18 erbracht werden.

Die WEF ergibt sich folglich als

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \frac{\ln(1-q\theta)}{\ln(1-\theta)} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{A}{x}\left(\frac{p\theta t}{1-q\theta}\right)^x \\ &= \frac{\ln(1-q\theta)}{\ln(1-\theta)} - A\ln\left(1 - \frac{p\theta t}{1-q\theta}\right) \\ &= \frac{\ln[1-\theta(q+pt)]}{\ln(1-\theta)}, \end{aligned} \tag{10.39}$$

ein Ausdruck, in dem wir sofort die Verteilung

$$L(\theta) \vee NE(p)$$

erkennen.

Die **faktoriellen Momente** ergeben sich analog wie bei der logarithmischen Verteilung als

$$\mu_{(r)} = \frac{A(r-1)!(p\theta)^r}{(1-\theta)^r}, \tag{10.40}$$

so daß gilt:

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{Ap\theta}{1-\theta} \\ \mu_2 &= \frac{Ap\theta\,[1-\theta(q+Ap)]}{(1-\theta)^2} \end{aligned} \tag{10.41}$$

Übung 10.1.18. Man zeige für die modifizierte logarithmische Verteilung in (10.38), daß $F(\infty) = 1$ gilt.

Übung 10.1.19. Man leite Formel 10.40 ab. [Man benutze

$$\mu_{(r)} = \sum x(x-1)\ldots(x-r+1)f(x)$$

und stelle dies durch Ableitungen dar.]

10.1.10. Binomialv. (ny,p) $\bigwedge_y$ Logarithmische V. (θ)

Da die Binomialverteilung die Bedingung (9.18) erfüllt, kann man die **WEF** direkt aufstellen als

$$G_X(t) = \frac{\ln[1-\theta(q+pt)^n]}{\ln(1-\theta)}, \tag{10.42}$$

worin man sofort die Verteilung

$$L(\theta) \vee B(n,p)$$

erkennt. Die WF

$$f(x) = \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x} \frac{A\theta^y}{y} \tag{10.43}$$

kann wieder in eine für Rechenzwecke angenehmere Form überführt werden. Es ist

$$\begin{aligned} P_x &= \underbrace{\frac{A}{x!}\left(\frac{p}{q}\right)^x}_{C} \sum_{y=1}^{\infty} (ny)_{(x)} \frac{(\theta q^n)^y}{y} \\ &= C \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{x} S(x,k)(ny)^k \frac{(\theta q^n)^y}{y} \\ &= C \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \sum_{y=1}^{\infty} \frac{y^k\,(\theta q^n)^y}{y}. \end{aligned}$$

Sei nun $A' = -\ln(1-\theta q^n)$. Die letzte Summe über y multiplizieren wir mit A'/A', so daß

$$\frac{1}{A'}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{y^k A'(\theta q^n)^y}{y} = \frac{1}{A'}\mu_k',$$

gilt, wobei μ_k' das k-te Anfangsmoment einer logarithmischen Verteilung mit dem Parameter θq^n ist. Nach (8.13) ist aber

$$\mu_k' = A'\sum_{j=1}^{k} Z(k,j)\frac{(j-1)!(\theta q^n)^j}{(1-\theta q^n)^j},$$

so daß sich nach Kürzung der A'

$$P_x = \frac{A}{x!}\left(\frac{p}{q}\right)^x \sum_{k=1}^{x} S(x,k)n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j)(j-1)!\left(\frac{\theta q^n}{1-\theta q^n}\right)^j, \quad x = 1,2,\ldots \tag{10.44}$$

ergibt. Aus dieser Formel kann man wiederum nur P_x für $x \geq 1$ berechnen. Für P_0 gilt

$$P_0 = \frac{\ln(1-\theta q^n)}{\ln(1-\theta)}, \tag{10.45}$$

was man entweder aus (10.42) oder aus (10.43) leicht berechnet.

Beispiel 10.1.13. Man leite für diese Verteilung P_1 und P_2 ab.

Lösung: Aus (10.44) ergibt sich

$$P_1 = \frac{Ap}{q}\cdot n\cdot\frac{\theta q^n}{1-\theta q^n} = \frac{Anp\theta q^{n-1}}{1-\theta q^n}$$

$$P_2 = \frac{A}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^2\left\{-\frac{n\theta q^n}{1-\theta q^n} + n^2\left[\frac{\theta q^n}{1-\theta q^n} + \left(\frac{\theta q^n}{1-\theta q^n}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{Anp^2\theta q^{n-2}}{2(1-\theta q^n)}\cdot\left(n-1+\frac{n\theta q^n}{1-\theta q^n}\right). \bullet$$

Die **faktoriellen Momente** ergeben sich als

$$\begin{aligned}
\mu_{(r)} &= \sum_{x=0}^{ny}\sum_{y=1}^{\infty} x_{(r)}\binom{ny}{x}p^x q^{ny-x}\frac{A\theta^y}{y} \\
&= \sum_{y=1}^{\infty}\frac{A\theta^y}{y}p^r(ny)_{(r)}\underbrace{\sum_{x=r}^{ny}\binom{ny-r}{x-r}p^{x-r}q^{ny-x}}_{=1} \\
&= p^r\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{r} S(r,k)(ny)^k\frac{A\theta^y}{y} \\
&= p^r\sum_{k=1}^{r} S(r,k)n^k\sum_{y=1}^{\infty}\frac{y^k A\theta^y}{y} \\
&= Ap^r\sum_{k=1}^{r} S(r,k)n^k\sum_{j=1}^{k} Z(k,j)(j-1)!\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^j.
\end{aligned} \tag{10.46}$$

Die Umwandlung der letzten Summe erfolgt wie in (8.13) (s. auch oben).

Beispiel 10.1.14. Man berechne $\mu_{(1)}$ bis $\mu_{(4)}$ aus (10.46).

Lösung: Setzt man $c = \theta/(1-\theta)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mu_{(1)} &= Anpc \\
\mu_{(2)} &= Ap^2\left[-nc + n^2\left(c+c^2\right)\right] \\
\mu_{(3)} &= Ap^3\left[2nc - 3n^2\left(c+c^2\right) + n^3 2!\left(c+3c^2+c^3\right)\right] \\
\mu_{(4)} &= Ap^4\left[-6nc + 11n^2\left(c+c^2\right) - 6n^3 2!\left(c+3c^2+c^3\right) + \right. \\
&\quad \left. + n^4 3!\left(c+7c^2+6c^3+c^4\right)\right]
\end{aligned} \tag{10.47}$$

Weitere Umformungen überlassen wir dem Leser. •

Übung 10.1.20. Man zeige, daß für (10.43)

$$\mu_2 = Anp\theta\left[np(1-A\theta) + q(1-\theta)\right]/(1-\theta)^2$$

gilt.

Übung 10.1.21. Man berechne P_1 und P_2 aus (10.42) und vergleiche dies mit den Resultaten im Beispiel 10.1.13.

10.1.11. Binomialv. (n,p) $\bigvee$ Logarithmische V. (θ)

Die **WEF** ergibt sich nach Definition als

$$G_X(t) = \left[q + \frac{p\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}\right]^n = \left[q - Ap\ln(1-\theta t)\right]^n . \qquad (10.48)$$

Durch sekzessive Ableitungen ergibt sich

$$P_x = \frac{q^n\theta^x}{x!}\sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|n_{(j)}\left(\frac{Ap}{q}\right)^j . \qquad (10.49)$$

Beispiel 10.1.15. Man berechne P_1 bis P_4 aus (10.49).

Lösung: Für $c = Ap/q$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
P_0 &= q^n \\
P_1 &= \theta q^n nc \\
P_2 &= \frac{\theta^2 q^n}{2!}\left[nc + n(n-1)c^2\right] \\
P_3 &= \frac{\theta^3 q^n}{3!}\left[2nc + 3n(n-1)c^2 + n(n-1)(n-2)c^3\right] \\
P_4 &= \frac{\theta^4 q^n}{4!}\left[6nc + 11n(n-1)c^2 + 6n(n-1)(n-2)c^3 + \right. \\
&\quad \left. + n(n-1)(n-2)(n-3)c^4\right] . \bullet
\end{aligned}$$

Analog ergeben sich die **faktoriellen Momente** aus (10.48) als

$$\mu_{(r)} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r \sum_{j=1}^{r}|S(r,j)|n_{(j)}(Ap)^j . \qquad (10.50)$$

Beispiel 10.1.16. Man berechne μ_1' und μ_2 mit Hilfe von (10.50).

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mu_{(1)} = \mu_1' &= \frac{\theta nAp}{1-\theta} \\
\mu_{(2)} &= \frac{\theta^2\left[nAp + n(n-1)(Ap)^2\right]}{(1-\theta)^2} \qquad (10.51) \\
\mu_2 &= \frac{\theta nAp(1-\theta Ap)}{(1-\theta)^2} . \bullet
\end{aligned}$$

Wenn n bekannt ist, kann man p aus der Häufigkeit der nullten Klasse schätzen. Wegen $P_0 = q^n$ folgt

$$\hat{p} = 1 - \left(\frac{f_0}{N}\right)^{\frac{1}{n}} , \qquad (10.52)$$

und θ kann man iterativ mit Hilfe von μ_1' berechnen aus

$$\frac{\bar{x}}{n\hat{p}} = \frac{\hat{\theta}}{-(1-\hat{\theta})\ln(1-\hat{\theta})} . \qquad (10.53)$$

Übung 10.1.22. Man verallgemeinere die Null-Eins-Verteilung (p) durch die logarithmische Verteilung und zeige, daß das Resultat eine modifizierte logarithmische Verteilung ist.

10.2. Poisson-Verteilungen

Wir haben bereits mehrere Kombinationen der Poisson-Verteilung kennengelernt. So ist bekannt, daß

$$P(\lambda y) \bigwedge_{y} B(n,p)$$

und

$$B(n,p) \bigvee P(\lambda)$$

identisch sind. Außerdem stimmen

$$P(\lambda) \bigvee B(n,p)$$

und

$$B(ny,p) \bigwedge_{y} P(\lambda)$$

überein. Weiter haben wir gezeigt, daß

$$P(\lambda) \bigvee NE(p)$$

mit

$$NE(p) \bigwedge_{n*} P(\lambda)$$

und mit

$$B(n,p) \bigwedge_{n} P(\lambda)$$

identisch ist. Schließlich haben wir festgestellt, daß

$$P(\lambda y) \bigwedge_{y} P(m)$$

und daher auch

$$P(m) \bigvee P(\lambda)$$

eine Neyman-Verteilung des Typs A darstellen. In der Aufgabe 10.30 findet man die Kombination

$$P(\lambda) \bigwedge_{\lambda} P(m),$$

wobei λ nur nichtnegative Werte annehmen kann. Es bleiben also nur wenige Kombinationen übrig.

10.2.1. Poisson-V. $(\lambda y) \bigwedge_{y}$ negative Binomialv. (k,P)

Laut Definition ergibt sich

$$f(x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y}(\lambda y)^x}{x!} \binom{-k}{y} \left(-\frac{P}{Q}\right)^y Q^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!Q^k} \sum_{y=0}^{\infty} y^x \binom{-k}{y} \left(\frac{-Pe^{-\lambda}}{Q}\right)^y, \quad x = 0,1,\ldots \tag{10.54}$$

Durch Umordnungen und Verwendung der Stirling-Zahlen ergibt sich daraus (vgl. Übung 10.2.1)

$$f(x) = \begin{cases} \left(Q - Pe^{-\lambda}\right)^{-k}, & x = 0 \\ \dfrac{\lambda^x}{x!\,(Q - Pe^{-\lambda})^k} \displaystyle\sum_{j=1}^{x} Z(x,j) k^{(j)} \left(\frac{Pe^{-\lambda}}{Q - Pe^{-\lambda}}\right)^j, & x = 1,2,\ldots, \end{cases} \tag{10.55}$$

was eine sehr bequeme Rechenformel darstellt. Dabei bedeutet $k^{(j)} = k(k+1)\ldots(k+j-1)$. Der Leser sollte die Schritte zwischen (10.54) und (10.55) unbedingt nachvollziehen.

Beispiel 10.2.1. Man leite P_1 bis P_3 aus (10.55) ab.

Lösung:

$$P_1 = \lambda k P e^{-\lambda}\left(Q - Pe^{-\lambda}\right)^{-k-1}$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2!\,(Q - Pe^{-\lambda})^k}\left[\frac{kPe^{-\lambda}}{Q - Pe^{-\lambda}} + \frac{k(k+1)P^2e^{-2\lambda}}{(Q - Pe^{-\lambda})^2}\right]$$

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{3!\,(Q - Pe^{-\lambda})^k}\left[\frac{kPe^{-\lambda}}{Q - Pe^{-\lambda}} + \frac{3k(k+1)P^2e^{-2\lambda}}{(Q - Pe^{-\lambda})^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{k(k+1)(k+2)P^3e^{-3\lambda}}{(Q - Pe^{-\lambda})^3}\right].\bullet$$

Die **WEF** ergibt sich aus (10.54) oder durch direktes Einsetzen als

$$G_X(t) = \left[Q - Pe^{-\lambda(1-t)}\right]^{-k}, \tag{10.56}$$

was gleichzeitig auch die WEF von

$$NB(k,P) \bigvee P(\lambda)$$

ist.

Die **faktoriellen Momente** erhält man ähnlich als

$$\begin{aligned}\mu_{(r)} &= \lambda^r \sum_{j=1}^{r} Z(r,j)(-k)_{(j)}(-P)^j \\ &= \lambda^r \sum_{j=1}^{r} Z(r,j)k^{(j)}P^j,\end{aligned} \tag{10.57}$$

da $(-k)_{(j)} = (-k)(-k-1)\ldots(-k-j+1) = (-1)^j k^{(j)}$ gilt (vgl. Übung 10.2.3).

Beispiel 10.2.2. Man berechne $\mu_{(1)}$ und $\mu_{(2)}$ aus (10.57) und daraus μ_2.

Lösung:

$$\begin{aligned}\mu_{(1)} &= \lambda k P \\ \mu_{(2)} &= \lambda^2\left[kP + k(k+1)P^2\right].\end{aligned} \tag{10.58}$$

Daraus ergibt sich

$$\mu_2 = \lambda k P(1 + \lambda Q).\bullet$$

Übung 10.2.1. Man überführe (10.54) in (10.55).

Übung 10.2.2. Man leite die Werte $f(x)$ von $P(\lambda y)\bigwedge_y G(p)$ ab und zeige, daß dies ein Spezialfall von (10.55) bzw. (10.56) mit $k = 1$ ist.

Übung 10.2.3. Man leite (10.57) aus (10.54) ab.

10.2.2. Poisson-V. (λ) $\bigvee$ negative Binomialv. (k,P)

Diese Verteilung ist nach Definition identisch mit

$$NB(ky,P)\bigwedge_y P(\lambda).$$

Die **WEF** wird definiert als

$$G_X(t) = e^{-\lambda\left[1-(Q-Pt)^{-k}\right]} = e^{-\lambda}e^{\lambda(Q-PT)^{-k}} \tag{10.59}$$

Die WF ergibt sich entweder aus (10.59) oder direkt als

$$f(x) = \sum_{y=0}^{\infty}\binom{-ky}{x}\left(-\frac{P}{Q}\right)^x Q^{-ky}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{x!}\left(-\frac{P}{Q}\right)^x \sum_y (-ky)_{(x)} \frac{\left(\lambda Q^{-k}\right)^y}{y!} =$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-\lambda}}{x!}\left(\frac{P}{Q}\right)^x}_{c} \sum_y (ky)^{(x)} \frac{\left(\lambda Q^{-k}\right)^y}{y!} =$$

$$= c \sum_y \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| (ky)^j \frac{\left(\lambda Q^{-k}\right)^y}{y!} =$$

$$= c \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| k^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) \sum_y y_{(i)} \frac{\left(\lambda Q^{-k}\right)^y}{y!}. \tag{10.60}$$

Die letzten zwei Summen ergeben

$$\sum_{i=1}^{j} Z(j,i) \left(\lambda Q^{-k}\right)^i \sum_{y=i}^{\infty} \frac{\left(\lambda Q^{-k}\right)^{y-i}}{(y-i)!},$$

wobei die letzte Summe wiederum den Wert $e^{\lambda Q^{-k}}$ hat. Setzt man diese Konstante ganz nach vorne, so erhält man schließlich

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda\left(1-Q^{-k}\right)}, & x = 0 \\ \dfrac{e^{-\lambda\left(1-Q^{-k}\right)}}{x!}\left(\dfrac{P}{Q}\right)^x \displaystyle\sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| k^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) \left(\lambda Q^{-k}\right)^i, & \\ & x = 1,2,\ldots. \end{cases} \tag{10.61}$$

Beispiel 10.2.3. Man leite P_0 bis P_2 aus (10.61) ab.

Zusammengesetzte und verallgemeinerte Verteilungen

Lösung:

$$P_0 = e^{-\lambda\left(1-Q^{-k}\right)}$$

$$P_1 = e^{-\lambda\left(1-Q^{-k}\right)} \frac{P}{Q} k\lambda Q^{-k}$$

$$P_2 = \frac{e^{-\lambda\left(1-Q^{-k}\right)}}{2!}\left(\frac{P}{Q}\right)^2 \left\{k\lambda Q^{-k} + k^2\left[\lambda Q^{-k} + \left(\lambda Q^{-k}\right)^2\right]\right\}. \bullet$$

Durch Ableitungen von (10.59) und Umordnungen bekommt man dasselbe Resultat. Diese Verteilung wird oft als **Poisson-Pascal-Verteilung** bezeichnet.

Die **faktoriellen Momente** ergeben sich auf die übliche Art als

$$\mu_{(r)} = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} x_{(r)} \binom{-ky}{x} \left(-\frac{P}{Q}\right)^x Q^{-ky} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} =$$

$$= \left(-\frac{P}{Q}\right)^r e^{-\lambda} \sum_x \sum_y (-ky)_{(r)} \binom{-ky-r}{x-r} \left(-\frac{P}{Q}\right)^{x-r} \frac{Q^{-ky}\lambda^y}{y!}.$$

Wegen $(-ky)_{(r)} = (-1)^r (ky)^{(r)}$ folgt daraus

$$\mu_{(r)} = \left(\frac{P}{Q}\right)^r e^{-\lambda} \sum_y (ky)^{(r)} \frac{\left(\lambda Q^{-k}\right)^y}{y!} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{-ky-r}{x-r} \left(-\frac{P}{Q}\right)^{x-r}.$$

Die letze Summe ergibt

$$\left(1-\frac{P}{Q}\right)^{-ky-r} = \left(\frac{Q-P}{Q}\right)^{-ky-r} = Q^{ky+r},$$

da $Q - P = 1$ gilt. Nach geeigneter Kürzung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mu_{(r)} &= P^r e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} (ky)^{(r)} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= P^r e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} |S(r,j)| (ky)^j \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= P^r e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{r} |S(r,j)| k^j \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) y_{(i)} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= P^r e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{r} |S(r,j)| k^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) \lambda^i \sum_{y=i}^{\infty} \frac{\lambda^{y-i}}{(y-i)!}.
\end{aligned}$$

Die letzte Summe ist gleich e^λ, so daß man schließlich

$$\mu_{(r)} = P^r \sum_{j=1}^{r} |S(r,j)| k^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) \lambda^i \tag{10.62}$$

erhält.

Beispiel 10.2.4. Man berechne $\mu_{(1)}$, $\mu_{(2)}$ und μ_2.

Lösung: Laut (10.62) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mu_{(1)} &= kP\lambda \\
\mu_{(2)} &= P^2 \left[k\lambda + k^2 \left(\lambda + \lambda^2\right)\right] = kP^2 \lambda [1 + k(1+\lambda)] \\
\mu_2 &= kP\lambda(Q + kP). \bullet
\end{aligned} \tag{10.63}$$

Schätzungen von Parametern mit Hilfte von faktoriellen Kumulanten findet man in Katti & Gurland (1961), vgl. auch Johnson & Kotz (1969:200).

In Abschnitt 4 haben wir die negative Binomialverteilung folgendermaßen definiert (vgl. 4.2)

$$f(n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots$$

Hier sind N die Zufallsvariable und k, p die Parameter. Setzen wir diese Verteilung mit der Poisson-Verteilung auf die obige Weise zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{y \le \frac{n}{k}} \binom{n-1}{ky-1} p^{ky} q^{n-ky} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \\
&= e^{-\lambda} q^n \sum_{y \le \frac{n}{k}} \binom{n-1}{ky-1} \frac{[\lambda(p/q)^k]^y}{y!}, \quad n = k, k+1, \ldots
\end{aligned} \tag{10.64}$$

Diese Verteilung ist bekannt als die **verallgemeinerte Pólya-Aeppli** Verteilung. Detailliert untersucht wurde der Spezialfall mit $k = 1$, die **Pólya-Aeppli**-Verteilung, definiert als

$$f(n) = \begin{cases} e^{-\lambda} & n = 0 \\ e^{-\lambda} q^n \sum\limits_{y=1} \binom{n-1}{y-1} \dfrac{(\lambda p/q)^y}{y!}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{10.65}$$

Dies ist jedoch die Verteilung

$$P(\lambda) \bigvee GI(p),$$

wobei die geometrische Verteilung GI (= 1-verschobene geometrische Verteilung) die WF

$$f(x) = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

und die WEF

$$G_Y(t) = pt(1-qt)^{-1}$$

hat.

Die **WEF** die Pólya-Aeppli-Verteilung ergibt sich dann als

$$G_X(t) = e^{-\lambda\left[1-pt(1-qt)^{-1}\right]}. \tag{10.66}$$

Beispiel 10.2.5. Man leite P_1 und P_2 der Pólya-Aeppli-Verteilung ab.

Lösung: Aus (10.65) ergibt sich

$$P_1 = e^{-\lambda} q \frac{\lambda p}{q} = \lambda p e^{-\lambda};$$

$$P_2 = e^{-\lambda} q^2 \left[\frac{\lambda p}{q} + \frac{\lambda^2 p^2}{2q^2}\right] = \lambda p e^{-\lambda}\left[q + \frac{\lambda p}{2}\right]. \bullet$$

Die **Momente** lassen sich mit den hier eingeführten Mitteln nur mühsam ableiten. Der sicherste Weg führt über die Ableitungen der WEF zu den **faktoriellen Momenten**. Eine kompaktere Formel kann man z.B. folgendermaßen erhalten. Man definiere **steigende faktorielle Momente** durch

$$\mu^{(r)} = E\left(x^{(r)}\right) = E\left[\sum_{m=1}^{r} |S(r,m)| x^m\right] = \sum_{m=1}^{r} |S(r,m)| E\left(x^m\right)$$
$$= \sum_{m=1}^{r} |S(r,m)| \mu'_m \tag{10.67}$$

Aus (10.65) folgt, wenn man bedenkt, daß n die Variable ist:

$$\mu^{(r)} = e^{-\lambda} \sum_{n=y}^{\infty} \sum_{y=1}^{n} n^{(r)} \binom{n-1}{y-1} q^n \frac{(\lambda p/q)^y}{y!}. \tag{10.68}$$

Verwendet man die Beziehung

$$n^{(r)} \binom{n-1}{y-1} = \binom{n+r-1}{y+r-1} (y+r-1)_{(r)},$$

so ergibt sich

$$\mu^{(r)} = e^{-\lambda} \sum_{y=1}^{n} (y+r-1)_{(r)} \frac{(\lambda p/q)^y}{y!} \sum_{n=y}^{\infty} \binom{n+r-1}{y+r-1} q^n. \tag{10.69}$$

Für die letzte Summe gilt

$$\sum_{n=y}^{\infty} \binom{n+r-1}{y+r-1} q^n = q^y \sum_{n=y}^{\infty} \binom{n+r-1}{y+r-1} q^{n-y}$$
$$= q^y (1-q)^{-y-r} = \left(\frac{q}{p}\right)^y \frac{1}{p^r}.$$

Setzt man dies in (10.69) ein, so erhält man

$$\mu^{(r)} = \frac{e^{-\lambda}}{p^r} \sum_{y=1}^{\infty} (y+r-1)_{(r)} \frac{\lambda^y}{y!} = \frac{e^{-\lambda}}{p^r} \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} S(r,j)(y+r-1)^j \frac{\lambda^y}{y!}. \tag{10.70}$$

Dabei ist bekanntlich

$$(y+r-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (r-1)^{j-i} y^i = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (r-1)^{j-i} \sum_{s=1}^{i} Z(i,s) y_{(s)}.$$

Einsetzen der rechten Seite in (10.70) liefert

$$\mu^{(r)} = \frac{e^{-\lambda}}{p^r} \sum_{j=1}^{r} S(r,j) \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (r-1)^{j-1} \sum_{s=1}^{i} Z(i,s) \sum_{y=1}^{\infty} y_{(s)} \frac{\lambda^y}{y!}.$$

Die letzte Summe ergibt wieder

$$\lambda^s \sum_{y=s}^{\infty} \frac{\lambda^{y-s}}{(y-s)!} = \lambda^s e^{\lambda},$$

so daß schließlich

$$\mu^{(r)} = \frac{1}{p^r}\sum_{j=1}^{r} S(r,j)\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(r-1)^{j-i}\sum_{s=1}^{i} Z(i,s)\lambda^s \qquad (10.71)$$

gilt.

Beispiel 10.2.6. Man berechne μ_2' und μ_2 mit Hilfe von (10.71).

Lösung:

$$\mu^{(1)} = \frac{1}{p}\left\{1\left[\binom{1}{0}(1-1)^{1-0}\cdot 1 + \binom{1}{1}(1-1)^{1-1}\lambda\right]\right\}$$

$$= \frac{\lambda}{p} \quad (\text{wegen } x^0 = 1)$$

$$\mu^{(2)} = \frac{1}{p^2}\left\{-1\left[\binom{1}{0}(2-1)^{1-0}\cdot 1 + \binom{1}{1}(2-1)^{1-1}\lambda\right] + \right.$$

$$+1\left[\binom{2}{0}(2-1)^{2-0}\cdot 1 + \binom{2}{1}(2-1)^{2-1}\lambda + \right.$$

$$\left.\left. + \binom{2}{2}(2-1)^{2-2}(\lambda+\lambda^2)\right]\right\}$$

$$= \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{p^2}$$

Daraus ergibt sich laut (10.67):

$$\mu^{(1)} = \mu_1' = \frac{\lambda}{p}$$

$$\mu^{(2)} = \mu_2' + \mu_1'$$

d.h.

$$\mu_2' = \mu^{(2)} - \mu^{(1)},$$

also

$$\mu_2' = \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{p^2} - \frac{\lambda}{p} = \frac{\lambda^2 + 2\lambda - \lambda p}{p^2}$$

und schließlich

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu^{(1)2} = \frac{\lambda^2 + 2\lambda - \lambda p}{p^2} - \frac{\lambda^2}{p^2} = \frac{\lambda(1+q)}{p^2}. \qquad (10.72)$$

Dasselbe Resultat erhält man durch Ableiten der WEF. •

Die Pólya-Aeppli-Verteilung hat nur zwei Parameter, die sich leicht schätzen lassen.

a) Benutzt man μ_1' und μ_2 so erhält man (vgl. Übung 10.2.5):

$$\hat{\lambda} = \frac{2\bar{x}^2}{S^2 + \bar{x}}$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{\lambda}}{\bar{x}} \qquad (10.73)$$

b) Aus P_0 und P_1 folgt

$$\hat{\lambda} = -\ln\frac{f_0}{N}$$

$$\hat{p} = \frac{f_1}{\hat{\lambda} f_0}. \qquad (10.74)$$

Tabellen, die die Anpassung erleichtern, findet man bei Sherbrooke (1966).

Übung 10.2.4. Unter Anwendung des Verfahrens, das von (10.68) zu (10.71) führte, leite man $\mu^{(2)}$ direkt aus (10.68) ab.

Übung 10.2.5. Man zeige die Richtigkeit der Formeln (10.73).

Übung 10.2.6. Man leite die Verteilung von

$$P(\lambda) \bigvee GII(p)$$

ab. [Hier ist die geometrische Verteilung $f(x) = pq^x$, $x = 0, 1, \ldots$. In (10.59) und (10.60) setze man $k = 1$].

10.2.3. Poisson-V. (λ) $\bigwedge\limits_{\lambda}$ Logarithmische V. (q)

Wenn der Parameter λ der Poisson-Verteilung selbst eine Zufallsvariable ist, die einer logarithmischen Verteilung folgt, dann erhalten wir die WF als

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \frac{Aq^\lambda}{\lambda} = \frac{A}{x!} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{x-1} \left(qe^{-1}\right)^\lambda \qquad (10.75)$$

(vgl. (8.3)). Daraus ergibt sich

$$P_0 = \frac{\ln\left(1 - qe^{-1}\right)}{\ln(1-q)} \qquad (10.76a)$$

$$P_1 = \frac{Aq}{e-q} \qquad (10.76b)$$

$$P_x = \frac{Ae}{(e-q)x!} \sum_{i=1}^{x-1} Z(x-1, i) i! \left(\frac{q}{e-q}\right)^i, \quad x = 2, 3, \ldots \qquad (10.76c)$$

Beispiel 10.2.7. Man leite (10.76c) ab.

Lösung: Die WF in (10.75) kann man wie folgt darstellen:

$$f(x) = \frac{A}{x!} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{x-1} \left(qe^{-1}\right)^\lambda = \frac{A}{x!} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-1} Z(x-1, i) \lambda_{(i)} \left(qe^{-1}\right)^\lambda$$

$$= \frac{A}{x!} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-1} Z(x-1, i) \left(qe^{-1}\right)^i \frac{d^i \left[\left(qe^{-1}\right)^\lambda\right]}{d\left(qe^{-1}\right)^i}$$

$$= \frac{A}{x!} \sum_{i=1}^{x-1} Z(x-1, i) \left(qe^{-1}\right)^i \frac{d^i}{d\left(qe^{-1}\right)^i} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(qe^{-1}\right)^\lambda.$$

Die letzte Summe ergibt

$$\frac{qe^{-1}}{1 - qe^{-1}},$$

so daß

$$f(x) = \frac{A}{x!} \sum_{i=1}^{x-1} Z(x-1, i) \left(qe^{-1}\right)^i \frac{d^i}{d\left(qe^{-1}\right)^i} \left[\frac{qe^{-1}}{1 - qe^{-1}}\right]$$

gilt.

Die i-te Ableitung von $\dfrac{qe^{-1}}{1 - qe^{-1}}$ nach $\left(qe^{-1}\right)$ ist $i! \left(1 - qe^{-1}\right)^{-i-1}$, somit erhält man

$$f(x) = \frac{A}{x! \left(1 - qe^{-1}\right)} \sum_{i=1}^{x-1} Z(x-1, i) i! \left(\frac{qe^{-1}}{1 - qe^{-1}}\right)^i.$$

Erweitern der Brüche mit e ergibt (10.76c).

Die **WEF** ist

$$G_X(t) = \frac{\ln\left(1 - qe^{t-1}\right)}{\ln(1-q)}. \qquad (10.77)$$

woraus sich die ersten **Momente** ergeben:

$$\mu_1' = \frac{Aq}{p}$$
$$\mu_2 = \frac{Aq(1+p-Aq)}{p^2}. \tag{10.78}$$

Den Parameter p kann man iterativ aus

$$\bar{x} = \frac{1-\hat{p}}{-\hat{p}\ln\hat{p}} \tag{10.79}$$

schätzen.

Übung 10.2.7. Man leite (10.76a) und (10.76b) aus (10.75) ab.

Übung 10.2.8. Man leite P_0, P_1 und P_2 aus der WEF (10.77) ab.

10.2.4. Poisson-V. (λy) $\bigwedge_y$ Logarithmische V. (q)

Die **WF** ergibt sich als

$$f(x) = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y}(\lambda y)^x}{x!}\frac{Aq^y}{y} = \frac{A\lambda^x}{x!}\sum_{y=1}^{\infty} y^{x-1}\left(qe^{-\lambda}\right)^y, \tag{10.80}$$

wobei wir einen ähnlichen Fall haben wie in Abschnitt 10.2.3. Folgt man der Ableitung in Beispiel 10.2.7, so erhält man

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(1-qe^{-\lambda}\right)}{\ln(1-q)}, & x=0 \\ \dfrac{A\lambda qe^{-\lambda}}{1-qe^{-\lambda}}, & x=1 \\ \dfrac{A\lambda^x}{x!\,(1-qe^{-\lambda})}\displaystyle\sum_{i=1}^{x-1} Z(x-1,i)i!\left(\frac{qe^{-\lambda}}{1-qe^{-\lambda}}\right)^i, & x=2,3,\ldots \end{cases} \tag{10.81}$$

Die **WEF** ergibt sich aus (10.80) als

$$G_X(t) = \frac{\ln\left(1-qe^{-\lambda(1-t)}\right)}{\ln(1-q)}, \tag{10.82}$$

(vgl. Übung 10.2.9) worin man die **verallgemeinerte logarithmische Verteilung**

$$L(q)\bigvee P(\lambda)$$

erkennt.

Die ersten **Momente** ergeben sich als

$$\mu_1' = \frac{A\lambda q}{p},$$
$$\mu_2 = \frac{A\lambda q\left[p+\lambda(1-Aq)\right]}{p^2}. \tag{10.83}$$

Übung 10.2.9. Man leite (10.82) aus der Definition der WEF ab.

10.2.5. Poisson-V. (λ) $\bigvee$ Logarithmische V. (q)

Einsetzen in die WEF der Poisson-Verteilung ergibt

$$G_X(t) = \exp\left\{-\lambda\left[1-\frac{\ln(1-qt)}{\ln(1-q)}\right]\right\} = e^{-\lambda[1+A\ln(1-qt)]}. \tag{10.84}$$

Daraus folgt durch sukzessive Ableitung

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}, & x=0 \\ \dfrac{e^{-\lambda}q^x}{x!}\displaystyle\sum_{j=1}^{x} |S(x,j)|(\lambda A)^j, & x=1,2,\ldots, \end{cases}$$

was sich auch in der Form

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}q^x}{x!}(\lambda A)^{(x)} = \binom{\lambda A + x - 1}{x} e^{-\lambda} q^x$$
$$= \binom{\lambda A + x - 1}{x} p^{\lambda A} q^x, \quad x = 0, 1, \ldots \tag{10.86}$$

schreiben läßt, da

$$p^{\lambda A} = p^{\frac{\lambda}{-\ln(1-q)}} = e^{-\lambda}$$

gilt. Letzeres zeigt man leicht durch Logarithmieren der Ausdrücke. Die Verteilung ist also eine **negative Binomialverteilung** mit den Parametern λA und p.

Die ersten **Momente** sind

$$\mu_1' = \frac{A\lambda q}{p}$$

und

$$\mu_2 = \frac{A\lambda q}{p^2}, \tag{10.87}$$

die restlichen kann man aus der negativen Binomialverteilung ableiten.

Die **Schätzung** der Parameter kann man folgendermaßen durchführen:

$$\hat{\lambda} = -\ln \frac{f_0}{N} \tag{10.88}$$

und $\hat{p}$ läßt sich iterativ bestimmen aus

$$\frac{\bar{x}}{-\ln \frac{f_0}{N}} = \frac{1-\hat{p}}{-\hat{p}\ln(\hat{p})}. \tag{10.89}$$

Übung 10.2.10. Man zeige, daß (10.84) der WEF der negativen Binomialverteilung mit den Parametern $A = \dfrac{\lambda}{-\ln(1-q)}$ und p entspricht.

10.3. Negative Binomialverteilungen

Es ist uns bereits bekannt, daß

$$NB(ky, p) \bigwedge_y P(\lambda) \approx P(\lambda) \bigvee NB(k, p)$$

und

$$NB(k, p) \bigvee P(\lambda) \approx P(\lambda y) \bigwedge_y NB(k, p)$$

gilt (vgl. Abschnitte 10.2.1, 10.2.2).

Die Verteilungen

$$NB(ky, p) \bigwedge_y B(n, p),$$
$$NB(k, p) \bigvee B(n, p)$$
$$NB(ky, p) \bigwedge_y NB(m, p')$$
$$NB(k, p) \bigvee NB(m, p')$$

werden nicht untersucht, da sie zu viele Parameter enthalten. Weiter zeigt man leicht, daß sich die WEF von

$$NB(k, p) \bigwedge_k B(n, p')$$

als

$$G_X(t) = \left\{[q' + p'p(1-qt)]^{-1}\right\}^n$$

ergibt, worin man die Verteilung

$$B(n,p') \bigvee G(p)$$

(vgl. Abschnitt 10.1.7.) erkennt. Entsprechend erweist sich

$$NB(k,p) \bigwedge_k P(\lambda)$$

als identisch mit $P(\lambda) \bigvee G(p)$ (vgl. Abschnitt 10.2.2.).

Aufgrund der obigen Überlegungen können wir uns auf bestimmte Verteilungen beschränken.

10.3.1. Negative Binomialv. (k,p) $\bigwedge_k$ Negative Binomialv. (m,p')

Aus der Definition der **WF**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} p^k q^x \binom{m+k-1}{k} p'^m q'^k, \tag{10.90}$$

ergibt sich die **WEF** als

$$G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} p^k (qt)^x \binom{m+k-1}{k} p'^m q'^k =$$
$$= p'^m \left[1 - q'p(1-qt)^{-1}\right]^{-m}, \tag{10.91}$$

worin man sofort die Verteilung

$$NB(m,p') \bigvee G(p)$$

erkennt.

Die Formel (10.90) läßt sich wie folgt vereinfachen:

$$f(x) = q^x p'^m \sum_k \binom{k+x+1}{x} \binom{m+k+1}{k} (pq')^k$$
$$= \frac{q^x p'^m}{x!} \sum_k (k+x-1)_{(x)} \binom{m+k-1}{k} (pq')^k.$$

Hier empfiehlt es sich, die Beziehung

$$(k+x-1)_{(x)} = \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| k^j = \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) k_{(i)}.$$

zu verwenden.

Durch Einsetzen ergibt sich

$$f(x) = \frac{q^x p'^m}{x!} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) \sum_k \binom{m+k-1}{k} k_{(i)} (pq')^k.$$

Wegen

$$k_{(i)}(pq')^k = (pq')^i \frac{d^i (pq')^k}{d(pq')^i},$$

läßt sich die letzte Summe in der Form

$$(pq')^i \frac{d^i}{d(pq')^i} \sum_k \binom{m+k-1}{k} (pq')^k = (pq')^i \frac{d^i}{d(pq')^i} \left[(1-pq')^{-m}\right]$$
$$= (pq')^i m^{(i)} (1-pq')^{-m-i}$$

darstellen. Setzen wir wieder oben ein, so erhalten wir

$$P_x = \frac{q^x p'^m}{x!} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) m^{(i)} (pq')^i (1-pq')^{-m-i}$$
$$= \left(\frac{p'}{1-pq'}\right)^m \frac{q^x}{x!} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) m^{(i)} \left(\frac{pq'}{1-pq'}\right)^i, \quad x = 1,2,\ldots \tag{10.92}$$

und $P_0 = p'^m(1-pq')^{-m}$.

Beispiel 10.3.1. Man berechne P_1 und P_2 aus (10.92).

Lösung:

$$P_1 = \left(\frac{p'}{1-pq'}\right)^m q\left[1 \cdot 1 \cdot m \cdot \frac{pq'}{1-pq'}\right] = mpqp'^m q'(1-pq')^{-m-1}$$

$$P_2 = \left(\frac{p'}{1-pq'}\right)^m \frac{q^2}{2!}\left\{1 \cdot 1 \cdot m \cdot \frac{pq'}{1-pq'} + \right.$$

$$\left. +1 \cdot \left[1 \cdot \frac{mpq'}{1-pq'} + \frac{m(m+1)(pq')^2}{(1-pq')^2}\right]\right\}$$

$$= mpq^2 p'^m q'(1-pq')^{-m-1} + \frac{m(m+1)}{2} p^2 q^2 p'^m q'^2 (1-pq')^{-m-2}. \bullet$$

Die ersten **Momente** erfolgen aus der WEF als

$$\mu_1' = \frac{mqq'}{pp'}$$
$$\mu_2 = \frac{mqq'(q+p')}{p^2 p'^2}. \tag{10.93}$$

Übung 10.3.1. Man leite P_0 und P_1 aus der WEF ab.

Übung 10.3.2. Man leite $\mu_{(1)}$ und $\mu_{(2)}$ aus der WEF ab.

10.3.2. Negative Binomialv. (k,p) $\bigwedge_k$ Logarithmische V. (θ)

Laut Definition ergibt sich die WF als

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} p^k q^x \frac{A\theta^k}{k} \qquad x = 0, 1, \ldots, \tag{10.94}$$

woraus durch geeignete Umformungen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-p\theta)}{\ln(1-\theta)}, & x = 0 \\[2ex] \dfrac{Aq^x}{x!} \sum\limits_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum\limits_{i=1}^{j} Z(j,i)(i-1)! \left(\dfrac{p\theta}{1-p\theta}\right)^i, & x = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{10.95}$$

folgt (vgl. Übung 10.3.3). Für die WEF gilt

$$G_X(t) = \frac{\ln[1-\theta p(1-qt)^{-1}]}{\ln(1-\theta)}, \tag{10.96}$$

worin man sofort die Verteilung

$$L(\theta) \bigvee G(p)$$

erkennt.

Die ersten **Momente** ergeben sich aus der WEF als

$$\mu_1' = \frac{Aq\theta}{p(1-\theta)} \tag{10.97}$$

und

$$\mu_2 = \frac{Aq\theta[1+q-\theta-Aq\theta]}{p^2(1-\theta)^2}.$$

Übung 10.3.3. Man leite (10.95) aus (10.94) ab.

Übung 10.3.4. Man leite P_1 und P_2 ab.

Übung 10.3.5. Man leite die WEF (10.96) ab.

10.3.3. Negative Binomialv. (ky,p) $\bigwedge_y$ Logarithmische V. (θ)

Laut Definition gilt für die WF

$$f(x) = \sum_{y \geq \frac{1}{k}} \binom{ky + x - 1}{x} p^{ky} q^x \frac{A\theta^y}{y}. \tag{10.98}$$

Da die Bedingung (9.18) erfüllt ist, gilt

$$NB(ky, p) \bigwedge_y L(\theta) \approx L(\theta) \bigvee NB(k, p),$$

so daß die WEF sich als

$$G_X(t) = \frac{\ln[1 - \theta p^k (1 - qt)^{-k}]}{\ln(1 - \theta)} \tag{10.99}$$

ergibt. Der Ausdruck (10.99) läßt sich wie folgt umformen: Für $x = 0$ ergibt sich

$$P_0 = A\left[-\ln(1 - p^k\theta)\right] = \frac{\ln(1 - p^k\theta)}{\ln(1 - \theta)}. \tag{10.100}$$

Für $x \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{Aq^x}{x!} \sum_{y \geq \frac{1}{k}} (ky + x - 1)_{(x)} \frac{(p^k\theta)^y}{y} \\ &= \frac{Aq^x}{x!} \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| (ky)^j \frac{(p^k\theta)^y}{y} \\ &= \frac{Aq^x}{x!} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| k^j \sum_{y=1}^{\infty} y^j \frac{(p^k\theta)^y}{y}, \end{aligned} \tag{10.101}$$

wobei für die letzte Summe

$$\begin{aligned} \sum_{y=1}^{\infty} y^j \frac{(p^k\theta)^y}{y} &= \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) y_{(i)} \frac{(p^k\theta)^y}{y} = \\ &= \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) \left(p^k\theta\right)^i \frac{d^i}{d\left(p^k\theta\right)^i} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\left(p^k\theta\right)^y}{y}. \end{aligned}$$

gilt. Hier ergibt wiederum die letzte Summe

$$-\ln\left(1 - p^k\theta\right),$$

und die i-te Ableitung nach $(p^k\theta)$ ist

$$(i-1)!\left(1 - p^k\theta\right)^{-i}.$$

Setzt man das Resultat in (10.101) ein, so erhält man

$$P_x = \frac{Aq^x}{x!} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| k^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(i-1)! \left(\frac{p^k\theta}{1 - p^k\theta}\right)^i, \quad x = 1, 2, \ldots \tag{10.102}$$

Die ersten **Momente** erhält man aus der WEF als

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{A\theta kq}{p(1-\theta)}, \\ \mu_2 &= \frac{A\theta kq\left[1 - \theta + kq(1 - A\theta)\right]}{p^2(1-\theta)^2} \end{aligned} \tag{10.103}$$

Die Momente (10.97) sind Spezialfälle der Momente (10.103) mit $k = 1$.

Übung 10.3.6. Man zeige, daß

$$P_1 = \frac{A\theta p^k q^k}{1-\theta p^k},$$

$$P_2 = \frac{A\theta p^k q^{2k}\left(k+1-\theta p^k\right)}{2\left(1-\theta p^k\right)^2}$$

gilt.

10.3.4. Negative Binomialv. (k,p) $\bigvee$ Logarithmische V. (θ)

Die **WEF** ergibt sich als

$$G_x(t) = p^k\left[1 - q\frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}\right]^{-k} = p^k\left[1 + qA\ln(1-\theta t)\right]^{-k}, \quad (10.104)$$

woraus für die WF

$$f(x) = \begin{cases} p^k, & x = 0 \\ \dfrac{(p^k\theta)^x}{x!}\displaystyle\sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|k^{(j)}(qA)^j, & x = 1,2,\ldots \end{cases} \quad (10.105)$$

folgt. Die ersten **Momente** lauten

$$\mu_1' = \frac{Akq\theta}{p(1-\theta)},$$

$$\mu_2 = \frac{Akq\theta(p+Aq\theta)}{p^2(1-\theta)^2}. \quad (10.106)$$

Übung 10.3.7. Man zeige, daß

$$\mu_{(r)} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r \sum_{j=1}^{r}|S(r,j)|k^{(j)}\left(\frac{qA}{p}\right)^j. \quad (10.107)$$

gilt. [Man gehe von (10.104) aus und verallgemeinere.]

Übung 10.3.8. Man leite ab: (a) die WEF, (b) die WF, (c) μ_1' und μ_2 der Verteilung $NB(k,p)\bigvee NE(p')$. (d) Man zeige, daß $F(\infty)=1$ gilt. (e) Man zeige, daß $NB(k,p)\bigvee NE(p') \approx NE(p')\bigwedge_{n*} NB(k,p)$ ist.

10.4. Potenzreihen-Verteilungen (PRV)

Eine Verallgemeinerung kann auch darin bestehen, daß man mehrere Verteilungen auf eine gemeinsame, allgemeinere Grundlage zurückführt und eine "Familie" bildet. Eine der bekanntesten Familien sind die PRV, die man allgemein (vgl. Noack 1950) in der Form

$$f(x) = \frac{a(x)\theta^x}{S(\theta)}, \quad x = 0,1,2,\ldots \quad (10.108)$$

darstellen kann. Dabei bezeichnen

$a(x)$ – eine reelle Funktion von x

θ – einen Parameter der Verteilung mit $0<\theta<R$, wobei R den Konvergenzradius der Reihe bezeichnet,

$S(\theta)$ – die Summe der Potenzreihe, d.h. $S(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} a(x)\theta^x$.

Auf diese Art kann man offensichtlich eine ganze Reihe von Verteilungen erzeugen. Von den bekanntesten Verteilungen fallen darunter

(a) **Die Binomialverteilung**

$$a(x) = \binom{n}{x}$$

$$\theta = \frac{p}{q}$$

$$S(\theta) = (1+\theta)^n = \left(1 + \frac{p}{q}\right)^n,$$

woraus

$$f(x) = \frac{\binom{n}{x}\theta^x}{(1+\theta)^n} = \frac{\binom{n}{x}\left(\frac{p}{q}\right)^x}{\left(1+\frac{p}{q}\right)^n} = \frac{\binom{n}{x}p^x q^{-x}}{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n} = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

folgt.

(b) **Die Poisson-Verteilung.**
Hier ist

$$a(x) = \frac{1}{x!}$$

$$\theta = \lambda$$

$$S(\theta) = e^{\lambda},$$

woraus sich

$$f(x) = \frac{1}{x!}\frac{\lambda^x}{e^{\lambda}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

ergibt.

(c) **Die negative Binomialverteilung.**
Dabei ist

$$a(x) = \binom{k+x-1}{x}$$

$$\theta = q$$

$$S(\theta) = (1-\theta)^{-k} = p^{-k},$$

woraus

$$f(x) = \frac{\binom{k+x-1}{x}q^x}{p^{-k}} = \binom{k+x-1}{x}p^k q^x$$

folgt.

(d) **Die logarithmische Verteilung.**
Man setzt nun

$$a(x) = \frac{1}{x},$$

$$\theta = q,$$

$$S(\theta) = -\ln(1-q),$$

woraus

$$f(x) = \frac{q^x}{-x\ln(1-q)}$$

folgt.

Beispiel 10.4.1. Man konstruiere eine Verteilung aus der Funktion

$$f(\theta) = (1+\theta)e^{\theta}.$$

Lösung: Man entwickelt e^{θ} in eine Taylorreihe und bekommt

$$f(\theta) = (1+\theta)\left(1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$= 1 + 2\theta + \frac{3}{2!}\theta^2 + \frac{4}{3!}\theta^3 + \ldots$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{(x+1)}{x!}\theta^x.$$

Daher kann man setzten

$$a(x) = \frac{x+1}{x!},$$

$$S(\theta) = f(\theta) = (1+\theta)e^{\theta},$$

so daß sich die Verteilung

$$f(x) = \frac{a(x)\theta^x}{S(\theta)} = \frac{\frac{(x+1)\theta^x}{x!}}{(1+\theta)e^\theta} = \frac{(x+1)\theta^x(1+\theta)^{-1}e^{-\theta}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

ergibt.

Beispiel 10.4.2. Man zeige, daß die geometrischen Verteilungen I und II PRV sind.

Lösung:
I. Für $f(x) = pq^{x-1}$ ist

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 \\ \theta &= q \\ S(\theta) &= \frac{q}{p} = q(1-q)^{-1}; \end{aligned}$$

II. für $f(x) = pq^x$ ist

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 \\ \theta &= q \\ S(\theta) &= p^{-1} = (1-q)^{-1}. \end{aligned}$$

Haben mehrere Verteilungen eine gemeinsame Grundform, so lassen sich für sie einheitlich auch andere Größen ableiten.

Die **Rekursionsformel für Wahrscheinlichkeiten** ergibt sich aufgrund von

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{a(x+1)\theta^{x+1}/S(\theta)}{a(x)\theta^x/S(\theta)} = \frac{a(x+1)\theta}{a(x)}$$

als

$$P_{x+1} = \frac{a(x+1)}{a(x)}\theta P_x. \tag{10.109}$$

Beispiel 10.4.3. Man bestimme aus (10.109) die Rekursionsformeln für

(a) Binomialverteilung
(b) Poisson-Verteilung
(c) geometrische Verteilung
(d) negative Binomialverteilung
(e) logarithmische Verteilung

Lösung:

$$(a) \quad P_{x+1} = \frac{\binom{n}{x+1}\frac{p}{q}}{\binom{n}{x}} \cdot P_x = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot P_x$$

$$(b) \quad P_{x+1} = \frac{\frac{1}{(x+1)!}\lambda}{\frac{1}{x!}} \cdot P_x = \frac{\lambda}{x+1} \cdot P_x$$

$$(c) \quad P_{x+1} = qP_x$$

$$(d) \quad P_{x+1} = \frac{\binom{k+x}{x+1}q}{\binom{k+x-1}{x}} P_x = \frac{k+x}{x+1} \cdot q \cdot P_x$$

$$(e) \quad P_{x+1} = \frac{\frac{1}{x+1}q}{\frac{1}{x}} P_x = \frac{x}{x+1} \cdot q \cdot P_x. \bullet$$

Die **erzeugenden Funktionen** sind leicht abzuleiten. Die **MEF** ergibt sich als

$$M_X(t) = E\left(e^{tx}\right) = \frac{\sum_x a(x)\left(\theta e^t\right)^x}{S(\theta)} = \frac{S(\theta e^t)}{S(\theta)}, \tag{10.110}$$

die **WEF** als

$$G_X(t) = \frac{\sum_x a(x)(\theta t)^x}{S(\theta)} = \frac{S(\theta t)}{S(\theta)}. \tag{10.111}$$

Beispiel 10.4.4. Man leite die MEF ab (a) für die Binomialverteilung, (b) für die Poisson-Verteilung.

Lösung: (a) Bei der Binomialverteilung war

$$\theta = \frac{p}{q},$$

$$S(\theta) = (1+\theta)^n,$$

so daß

$$S(\theta e^t) = \left(1+\theta e^t\right)^n$$

und

$$M_X(t) = \frac{\left(1+\theta e^t\right)^n}{(1+\theta)^n} = \frac{\left(1+\frac{p}{q}e^t\right)^n}{\left(1+\frac{p}{q}\right)^n} = \left(q+pe^t\right)^n$$

gilt.

(b) Bei der Poisson-Verteilung war

$$\theta = \lambda$$

$$S(\theta) = e^\lambda,$$

so daß sich

$$S(\theta e^t) = e^{\lambda e^t}$$

und

$$M_X(t) = \frac{e^{\lambda e^t}}{e^\lambda} = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

ergibt.

Beispiel 10.4.5. Man leite die WEF ab (a) für die negative Binomialverteilung, (b) für die logarithmische Verteilung.

Lösung: (a) Wir hatten

$$\theta = q$$

$$S(\theta) = (1-\theta)^{-k} = p^{-k},$$

so daß

$$S(\theta t) = (1-\theta t)^{-k} = (1-qt)^{-k}$$

gilt und

$$G_X(t) = \frac{(1-qt)^{-k}}{p^{-k}} = p^k(1-qt)^{-k}.$$

(b) Hier ist

$$\theta = q$$

$$S(\theta) = -\ln(1-q),$$

so daß sich

$$S(\theta t) = -\ln(1-qt)$$

ergibt und

$$G_X(t) = \frac{-\ln(1-qt)}{-\ln(1-q)} = \frac{\ln(1-qt)}{\ln(1-q)}. \bullet$$

Die **Momente** und **Rekursionsformeln für Momente** lassen sich einheitlich ableiten. So ist beispielsweise

$$\mu_1' = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{xa(x)\theta^x}{S(\theta)} = \frac{\theta}{S(\theta)} \sum_x xa(x)\theta^{x-1}$$

$$= \frac{\theta}{S(\theta)} \sum_x \frac{d\left[a(x)\theta^x\right]}{d(\theta)} = \frac{\theta}{S(\theta)} \frac{d}{d\theta} \sum_x a(x)\theta^x =$$

$$= \frac{\theta}{S(\theta)} \frac{dS(\theta)}{d(\theta)} = \frac{\theta S'(\theta)}{S(\theta)}. \tag{10.112}$$

Beispiel 10.4.6. Man leite μ_1' mit Hilfe von (10.112) ab (a) für die Poisson-Verteilung, (b) für die negative Binomialverteilung, (c) für die logarithmische Verteilung.

Lösung:

(a)

$$S(\theta) = e^\lambda; \quad S'(\theta) = e^\lambda, \quad \text{daher gilt}$$

$$\mu_1' = \frac{\lambda e^\lambda}{e^\lambda} = \lambda.$$

(b)

$$S(\theta) = (1-\theta)^{-k}; \quad S'(\theta) = k(1-\theta)^{-k-1}, \quad \text{somit ist}$$

$$\mu_1' = \frac{\theta k(1-\theta)^{-k-1}}{(1-\theta)^{-k}} = k\theta(1-\theta)^{-1} = \frac{kq}{p}.$$

(c)

$$S(\theta) = -\ln(1-\theta); \quad S'(\theta) = \frac{1}{1-\theta}, \quad \text{daraus folgt}$$

$$\mu_1' = \frac{\theta}{-(1-\theta)\ln(1-\theta)} = \frac{Aq}{p}. \bullet$$

Das **r-te faktorielle Moment** ergibt sich analog als

$$\mu_{(r)} = \frac{\sum_x x_{(r)} a(x)\theta^x}{S(\theta)} = \frac{\theta^r}{S(\theta)} \sum_x \frac{d^r\left[a(x)\theta^x\right]}{d\theta^r} =$$

$$= \frac{\theta^r}{S(\theta)} \frac{d^r}{d\theta^r} \sum_x a(x)\theta^x = \frac{\theta^r S^{(r)}(\theta)}{S(\theta)} \tag{10.113}$$

wobei $S^{(r)}$ die r-te Ableitung nach θ bedeutet.

Beispiel 10.4.7. Man leite das r-te faktorielle Moment der Binomialverteilung ab.

Lösung:

$$S(\theta) = (1+\theta)^n; \quad S^{(r)}(\theta) = n_{(r)}(1+\theta)^{n-r}, \quad \text{woraus}$$

$$\mu_{(r)} = \frac{\theta^r n_{(r)}(1+\theta)^{n-r}}{(1+\theta)^n} = \frac{n_{(r)}\left(\frac{p}{q}\right)^r \left(1+\frac{p}{q}\right)^{n-r}}{\left(1+\frac{p}{q}\right)^n} = n_{(r)}p^r$$

folgt.

Die **Rekursionsformeln für Anfangsmomente** ergeben sich wie folgt: Leitet man

$$\mu_r' = \sum_x \frac{x^r a(x)\theta^x}{S(\theta)}$$

nach θ ab, so ergibt sich

$$\frac{d\mu_r'}{d\theta} = \sum_x \frac{x^r a(x) x\theta^{x-1} S(\theta) - x^r a(x)\theta^x S'(\theta)}{S^2(\theta)}.$$

Multiplikation beider Seiten mit θ ergibt

$$\theta \frac{d\mu_r'}{d\theta} = \sum_x \frac{x^{r+1}a(x)\theta^x}{S(\theta)} - \theta \frac{S'(\theta)}{S(\theta)} \cdot \frac{\sum_x x^r a(x)\theta^x}{S(\theta)} =$$

$$= \mu_{r+1}' - \mu_1' \mu_r'$$

wegen (10.112). Daraus folgt

$$\mu_{r+1}' = \mu_1' \mu_r' + \theta \frac{d\mu_r'}{d\theta}. \qquad (10.114)$$

Beispiel 10.4.8. Man entwickle aus (10.114) die Rekursionsformeln für Anfangsmomente (a) für die Poisson-Verteilung, (b) für die Binomialverteilung.

Lösung:

(a)

$$\theta = \lambda; \quad \mu_1' = \lambda, \quad \text{daher ist}$$

$$\mu_{r+1}' = \lambda \mu_r' + \frac{\lambda d\mu_r'}{d\lambda} = \lambda \left(\mu_r' + \frac{d\mu_r'}{d\lambda} \right).$$

(b)

$$\theta = \frac{p}{q}; \quad \mu_1' = np.$$

Hier ergibt sich eine kleine Komplikation: μ_r' ist zwar eine Funktion von θ, d.h. $\mu_r' = h(\theta)$, aber θ selbst ist eine Funktion von p (dem Parameter), also $\theta = g(p)$. Daher ist

$$\mu_r' = h(\theta) = h\left[g(p)\right].$$

Die Ableitung von μ_r' nach p ergibt

$$[\mu_r']' = h'\left[g(p)\right] g'(p),$$

d.h.

$$\frac{d\mu_r'}{dp} = \frac{d\mu_r'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dp},$$

woraus

$$\frac{d\mu_r'}{d\theta} = \frac{\frac{d\mu_r'}{dp}}{\frac{d\theta}{dp}} \qquad (10.115)$$

folgt.

Ist also θ nicht direkt der Parameter einer Verteilung, sondern nur seine Funktion, so muß man den Ausdruck (10.115) verwenden. Für die Binomialverteilung ist

$$\theta = \frac{p}{q} = \frac{p}{1-p},$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dp} = \frac{1}{q^2}.$$

Einsetzen in (10.114) ergibt

$$\mu_{r+1}' = np\mu_r' + \frac{\frac{p}{q}\frac{d\mu_r'}{dp}}{\frac{d\theta}{dp}} = np\mu_r' + \left(\frac{p}{q}\right) \cdot q^2 \frac{d\mu_r'}{dp}$$

$$= pq \left(\frac{n}{q}\mu_r' + \frac{d\mu_r'}{dp} \right). \bullet$$

Die **Rekursionsformel für die Zentralmomente** ergibt sich folgendermaßen. Wegen (10.112) gilt

$$\mu_r = \sum_x \frac{(x - \mu_1')^r a(x)\theta^x}{S(\theta)} = \sum_x \left[x - \frac{\theta S'(\theta)}{S(\theta)} \right]^r \frac{a(x)\theta^x}{S(\theta)}.$$

Die Ableitung nach θ ergibt

$$\frac{d\mu_r}{d\theta} = \sum_x \frac{r(x-\mu_1')^{r-1}(-\mu_1')'a(x)\theta^x}{S(\theta)} +$$
$$+\sum_x \frac{(x-\mu_1')^r a(x)\left[x\theta^{x-1}S(\theta) - \theta^x S'(\theta)\right]}{S^2(\theta)}$$
$$= -r\mu_{r-1}\frac{d\mu_1'}{d\theta} + \sum_x \frac{(x-\mu_1')^r a(x)\theta^{x-1}}{S(\theta)}\left[x - \frac{\theta S'(\theta)}{S(\theta)}\right].$$

Wegen

$$x - \frac{\theta S'(\theta)}{S(\theta)} = x - \mu_1'$$

folgt

$$\frac{d\mu_r}{d\theta} = -r\mu_{r-1}\frac{d\mu_1'}{d\theta} + \frac{1}{\theta}\sum_x \frac{(x-\mu_1')^{r+1}a(x)\theta^x}{S(\theta)}$$
$$= -r\mu_{r-1}\frac{d\mu_1'}{d\theta} + \frac{1}{\theta}\mu_{r+1},$$

woraus sich

$$\mu_{r+1} = \theta\left(\frac{d\mu_1'}{d\theta}r\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{d\theta}\right) \tag{10.116}$$

ergibt.

Beispiel 10.4.9. Man leite die Rekursionsformel für die Zentralmomente ab (a) für die Poisson-Verteilung, (b) für die Binomialverteilung.

Lösung:

(a)

$$\theta = \lambda; \quad \mu_1' = \lambda; \quad (\mu_1')' = 1,$$

daher ist

$$\mu_{r+1} = \lambda\left(r\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{d\lambda}\right).$$

(b) Im Beispiel 10.4.8. hatten wir

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1}{q^2}, \quad \text{so daß}$$
$$\frac{d\mu_1'}{d\theta} = \frac{d\mu_1'}{dp}\Big/\frac{d\theta}{dp} = nq^2,$$
$$\frac{d\mu_r}{d\theta} = \frac{d\mu_r}{dp}q^2,$$

gilt und schließlich

$$\mu_{r+1} = \frac{p}{q}\left(rnq^2\mu_{r-1} + q^2\frac{d\mu_r}{dp}\right)$$
$$= pq\left(rn\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp}\right). \bullet$$

Übung 10.4.1. Für die Verteilung in Beispiel 10.4.1. bestimme man (a) die Rekursionsformel für Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von (10.109), (b) $\mu_{(r)}$.

Übung 10.4.2. Man leite μ_1' mit Hilfe von (10.112) ab (a) für die Binomialverteilung, (b) für die logarithmische Verteilung.

Übung 10.4.3. Man leite die Rekursionsformel für die Anfangsmomente der logarithmischen Verteilung ab.

Übung 10.4.4. Man konstruiere eine Verteilung aus der Funktion $f(\theta) = (a+\theta)e^\theta$ und zeige, daß es eine PRV ist.

Benutzte und weiterführende Literatur:

Douglas (1980); Gurland (1965); Johnson, Kotz (1969); Katti, Gurland (1961, 1962); Kemp, Kemp (1965); McGuire, Brindley, Bancroft (1947); Noack (1950); Sherbrooke (1966); Shumway, Gurland (1960a, b); Skellam (1952); Sprott (1958).

Aufgaben

10.1. In der Übung 10.1.3 haben wir festgestellt, daß die Zusammensetzung $B(n,p) \bigwedge_n B(m,p)$ eine Binomialverteilung ergibt mit

$$f(x) = \binom{m}{x} (p^2)^x (q+qp)^{m-x} \quad \text{und} \quad G_X(t) = (1 - p^2 + p^2 t)^m.$$

Man leite μ_1' und μ_2 ab.

10.2. Aus der WEF (10.3)

$$G_X(t) = [q' + p'(q+pt)^n]^m$$

leite man P_0 und P_1 ab.

10.3. Man zeige, daß $\sum_x P_x = 1$ für den Ausdruck (10.4.) gilt.

10.4. Man leite für die Verteilung in (10.1) die Rekursionsformel für P_{x+1} ab.

10.5. Man zeige, daß die Zusammensetzung $B(ny,p) \bigwedge_y B(m,p')$ gegen die Neyman-Verteilung Typ A konvergiert für $m \to \infty$, $p' \to 0$, $p \to 0$, $mp' = \lambda$, $n \to \infty$, $np = 0$. [Man benutze (10.3).]

10.6. Man stelle mit Hilfe von (10.10) die Formeln für P_0 bis P_8 der Poisson-Binomialverteilung auf.

10.7. Man zeige, daß für die Poisson-Binomialverteilung (10.7)

$$\mu_3 = np\lambda \left[q(q-p) - 3npq + n^2p^2\right] \quad \text{und}$$
$$\mu_4 = 3n^2p^2\lambda^2(q+np)^2 + 6n^3p^3q\lambda + n^2p^2q\lambda(7-11p) + npq\lambda(1-6pq) \tag{10.117}$$

gilt.

10.8. Für die Zusammensetzung $B(ny,p) \bigwedge_y B(n,p)$ (vgl. Beispiel 10.1.1) zeige man

(a) daß

$$f(x) = \sum_{y \geq \frac{x}{n}} \binom{ny}{x}\binom{n}{y} p^{x+y} q^{n+ny-x-y} =$$
$$= \left(\frac{p}{q}\right)^x \frac{(q+pq^n)^n}{x!} \sum_{k=1}^{x} S(x,k) n^k \cdot \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) n_{(j)} \left(\frac{pq^n}{q+pq^n}\right)^j$$

ist.

(b) Aus dem Resultat berechne man P_2 und vergleiche mit Beispiel 10.1.1b.

10.9. Ist der Parameter n der Poisson-Binomialverteilung bekannt, dann schätze man λ und p mit Hilfe von μ_1' und P_1/P_0.

10.10. Man berechne P_5 einer Poisson-Binomialverteilung mit den Parametern $n = 10$; $p = 0,5$; $\lambda = 2$.

10.11. Man leite die MEF der Zusammensetzung $P(\lambda y) \bigwedge_y B(n,p)$ ab und vergleiche sie mit (10.14).

10.12. Man zeige, daß $\sum_x f(x) = 1$ für die Verteilung (10.15) gilt.

10.13. Man zeige, daß $\mu_{(r)} = r! \mu_{(1)}^r$ für das r-te faktorielle Moment der Zusammensetzung $B(n,p) \bigwedge_n G(p')$ gilt [vgl. (10.21)].

10.14. Man leite Formel (10.36) ab (faktorielle Momente der Verallgemeinerung $B(n,p) \bigvee G(p')$). [Man benutze (10.34).]

10.15. Man zeige, daß $F(\infty) = 1$ für (10.25) gilt.

10.16. Man berechne $\mu_{(1)}$ und $\mu_{(2)}$ der binomialgeometrischen Verteilung (10.25) aus der WEF (10.24) und vergleiche mit dem Beispiel 10.1.8.

10.17. Man stelle die WEF der n-maligen Faltung einer Null-Eins-Verteilung (p) auf, wobei n geometrisch verteilt ist mit dem Parameter p'.

10.18. Man verallgemeinere eine Null-Eins-Verteilung mit dem Parameter p' durch eine geometrische Verteilung mit dem Parameter

p und zeige, daß das Resultat eine geometrische Verteilung ist (vgl. Abschnitt 10.1.6).

10.19. Man stelle die WF und die WEF der Zusammensetzung $B(ny,p)\bigwedge_{y} NB(k,P)$ auf.

10.20. (Fortsetzung)
(a) Man zeige, daß $\sum P_x = 1$ gilt;
(b) man leite

$$P_x = \left(\frac{p}{q}\right)^x \frac{(Q-Pq^n)^{-k}}{x!} \sum_{j=1}^{x} S(x,j)n^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(-k)_{(i)} \left(\frac{-Pq^n}{Q-Pq^n}\right)^i \tag{10.118}$$

her.
(c) Man leite ab: P_0 aus der Definition, P_1 aus der WEF und P_2 aus (10.118).
(d) Man zeige, daß

$$\mu'_r = \sum_{j=1}^{r} Z(r,j)p^j \sum_{i=1}^{j} S(j,i)n^i \sum_{s=1}^{i} Z(i,s)(-k)_{(s)}(-P)^s \tag{10.119}$$

gilt.
[Es genügt, $\mu_{(j)}$ zu berechnen, vgl. dann (10.45).]

10.21. (Fortsetzung)
Man berechne μ'_1 und μ'_2 aus (10.119) und zeige

$$\mu'_2 = \mu'_1\,[q + np(1-k)P]\,.$$

10.22. Man zeige, daß die Verteilung $NE(p)\bigwedge_{n*} L(\theta)$, d.h. eine n-malige Faltung der Null-Eins-Verteilung, wobei n logarithmisch verteilt ist, eine modifizierte logarithmische Verteilung ergibt und daß sie mit $B(n,p)\bigwedge_{n} L(\theta)$ identisch ist [vgl. 10.38)].

10.23. Man leite die WF der Zusammensetzung 1-verschobene $B(n,p)\bigwedge_{n} P(\lambda)$ ab.

10.24. Was für eine Verteilung bekommt man, wenn man in (10.14) $n = 1$ setzt?

10.25. (a) Man leite die WF der Verallgemeinerung $NE(p)\bigvee P(\lambda)$ ab und zeige, daß dies eine modifizierte Poisson-Verteilung ist;
(b) man zeige, daß $F(\infty) = 1$ gilt.

10.26. Man betrachte die Verallgemeinerung $NE(p)\bigvee G(p')$.
(a) Man stelle die WEF auf.
(b) Man leite die WF ab und zeige, daß es sich um eine modifizierte geometrische Verteilung handelt.
(c) Man versuche, diese Verteilung aus der Zusammensetzung $NB(ky,p')\bigwedge_{y} B(n,p)$ abzuleiten, indem man $k = n = 1$ setzt.
(d) Man zeige, daß $F(\infty) = 1$ ist.
(e) Man leite die WEF aus der WF ab.
(f) Man zeige

$$\mu_{(r)} = p\left(\frac{q'}{p'}\right)^r r!.$$

(g) Man leite die MEF ab und berechne daraus μ'_1 bis μ'_4.
(h) Man leite die MEF der zentrierten Zufallsvariablen $M_{X-\mu'_1}(t)$ ab und berechne daraus μ_2.
(i) Man schätze p und p' mit Hilfe von μ'_1 und μ'_2.

10.27. (a) Man stelle die WEF der Verallgemeinerung 1-verschobene $G(p')\bigvee NE(p)$ auf.
(b) Man zeige, daß dies eine modifizierte geometrische Verteilung ist.
(c) Man zeige, daß $F(\infty) = 1$ gilt.
(d) Man stelle die in $x = 1$ gestutzte Verteilung auf. Man überzeuge sich, daß das Resultat eine 1-verschobene geometrische Verteilung mit dem Parameter $p'(1-q'q)^{-1}$ ist.

10.28. (a) Zu welcher Verteilung gehört $G_X(t) = q + p(q' + p't)^n$?
(b) Man rekonstruiere P_x.

10.29. (a) Man verallgemeinere die Null-Eins-Verteilung durch sich selbst und leite die WF ab.
(b) Man zeige, daß $\mu_1' = p^2$; $\mu_2 = p^2 q(1+p)$ ist.

10.30. Sei X Poisson-verteilt mit dem Parameter λ. Dieser Parameter nehme nur nichtnegative ganzzahlige Werte an, d.h. $\lambda = 0, 1, \ldots$ und sei ebenfalls Poisson-verteilt. Man symbolisiere diese Zusammensetzung, bestimme $f(x)$ und $G_X(t)$.

10.31. In $B(n,p) \bigvee P(\lambda)$ [Formeln (10.14), (10.16), Beispiel 10.1.6, Formeln (10.19)] ersetze man n durch $-k$, p durch $-P$ und zeige, daß das Resultat der Verteilung $P(\lambda y) \bigwedge_y NB(k, P)$ entspricht. Warum? Anschließend bestimme man μ_3 und μ_4.

10.32. Man zeige mit Hilfe der WEF, daß $P(\lambda) \bigvee NB(k, P)$ gegen die Neyman-A-Verteilung konvergiert, für $k \to \infty$, $Q \to 1$ und $kP = m$.

10.33. Sei die negative Binomialverteilung definiert als

$$f(n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots.$$

Man zeige, daß $NB(k,p) \bigwedge_k P(\lambda)$ der Pólya-Aeppli-Verteilung (10.65) entspricht.

10.34. Sei die NB-Verteilung definiert durch

$$f(x) = \binom{k+x-1}{x} p^k q^x, \quad x = 0, 1, \ldots.$$

Man zeige, daß
(a) $NB(k,p) \bigwedge_k P(\lambda)$ die folgende WF hat:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda q} q^x}{x!} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(p\lambda)^i, \quad x = 0, 1, \ldots \tag{10.120}$$

(b) Man zeige, daß $F(\infty) = 1$ gilt.
(c) Man leite P_0, P_1, P_2 ab.
(d) Man leite μ_1' und μ_2' ab.
(e) Man leite die WEF ab. [Man vergleiche diese Aufgabe mit der Übung 10.2.6]

10.35. Man zeige, daß die Pólya-Aeppli-Verteilung gegen die Poisson-Verteilung konvergiert für $q \to 0$.

10.36. Man zeige, daß für $P(\lambda) \bigwedge_\lambda NB(k,p)$ gilt:

(a)

$$f(x) = \frac{1}{x!} \left(\frac{pe}{e-k}\right)^k \sum_{i=1}^{x} Z(x,i) k^{(i)} \left(\frac{q}{e-q}\right)^i, \tag{10.121}$$

(b)

$$G_X(t) = p^k \left(1 - qe^{t-1}\right)^{-k}. \tag{10.122}$$

(c) Man leite P_0 und P_1 ab.
(d) Man leite μ_1' und μ_2' ab.
(e) Man leite $\mu_{(r)}$ ab.

10.37. Man leite μ_r' der PRV im Beispiel 10.4.1 ab.

10.38. Man leite μ_{r+1} der Verteilung

$$f(x) = \frac{(x+a)\theta^x (a+\theta)^{-1} e^{-\theta}}{x!} \quad x = 0, 1, \ldots \tag{10.123}$$

ab. [Vgl. Übung 10.4.4]

10.39. Man leite P_{x+1} für die Verteilung (10.123) ab.

10.40. Man leite μ_1' der geometrischen Verteilung I und II mit Hilfe von (10.112) ab.

10.41. Mit Hilfe von (10.114) bestimme man μ_{r+1}' für
(a) die geometrische Verteilung I,
(b) die negative Binomialverteilung,
(c) die Verteilung im Beispiel 10.4.1,

(d) die Verteilung (10.123).

10.42. Man leite die MEF und die WEF der Verteilung (10.123) ab.

10.43. Mit Hilfe von (10.111) stelle man die WEF auf für
(a) die Binomialverteilung
(b) die Poisson-Verteilung
(c) die geometrischen Verteilungen I und II.

10.44. Man stelle die 0-gestutzte Poisson-Verteilung auf und zeige, daß sie eine PRV ist.

10.45. Man zeige, daß sich aus $f(\theta) = \left(e^{\theta} - 1\right)^2$ die folgende PRV ergibt:

$$f(x) = \frac{(2^x - 2)\,\theta^x}{x!\,(e^{\theta} - 1)^2} = \frac{2Z(x,2)\theta^x}{x!\,(e^{\theta} - 1)^2}; \quad x = 2,3,\ldots \qquad (10.124)$$

Diese Verteilung ist ein Spezialfall der **Stirling-Verteilung zweiter Art** mit $n = 2$.

10.46. (Fortsetzung). Man leite ab:
(a) die WEF,
(b) μ_1' und μ_2 der Verteilung (10.124).

10.47. Ist die 0-gestutzte Poisson-Verteilung ein Spezialfall der Stirling-Verteilung zweiter Art?

10.48. Seien X und Y zwei identische 0-gestutzte Poisson-Verteilungen. Man zeige, daß $Z = X + Y$ einer Stirling-Verteilung zweiter Art folgt.

10.49. Man zeige mit Hilfe der WEF, daß $P(\lambda) \bigvee NB(k,p)$ gegen die Poisson-Verteilung mit dem Parameter mk konvergiert für $\lambda \to \infty$, $p \to 1$, $q\lambda = m$. [Man betrachte λ und p als Funktion von x und benutze die Regel von de l'Hospital.]

10.50. Man zeige mit Hilfe der WEF, daß $P(\lambda) \bigvee NB(k,p)$ gegen die negative Binomialverteilung mit den Parametern m und p konvergiert, für $\lambda \to \infty$, $k \to 0$, $\lambda k = m$. [Vgl. Aufgabe 10.49].

10.51. Man zeige, daß sich die WF von $B(ny,p) \bigwedge_y B(m,p')$ [Formel (10.4)] folgendermaßen schreiben läßt

$$f(x) = \begin{cases} (q' + q^n p')^n, & x = 0 \\ \dfrac{(p/q)^x}{x!} \displaystyle\sum_{j=1}^{x} S(x,k) n^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) m_{(i)} (q^n p')^i (q' + q^n p')^{m-i}, & x \geq 1 \end{cases} \qquad (10.125)$$

10.52. Man leite $\mu_{(r)}$ folgender Verteilungen ab:
(a) $B(ny,p) \bigwedge\limits_y B(m,p')$,
(b) $B(n,p) \bigwedge\limits_n P(\lambda)$,
(c) $P(\lambda) \bigwedge\limits_\lambda L(q)$,
(d) $P(\lambda y) \bigwedge\limits_y L(q)$.

11. Die verallgemeinerte hypergeometrische Verteilung (VHG)

11.1. Einführung

Bei der hypergeometrischen Verteilung in Abschnitt 5 waren die Parameter N, M und n alle positiv und ganzzahlig. Läßt man jedoch beliebige reelle Werte zu und kombiniert sie so, daß man positive Wahrscheinlichkeiten bekommt, so ergeben sich nach Kemp & Kemp (1956) acht Typen (vgl. auch Johnson & Kotz 1969), von denen wir lediglich den Typ IV behandeln werden, da er in seinen Spezialfällen in der Linguistik bereits ausgiebig verwendet wurde.

Setzt man $a = M$, $b = N - M$, so lautet die WF

$$f(x) = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}.$$

Wenn die **faktoriellen Momente** existieren, so zeigt man leicht (vgl. Abschnitt 1.2)

$$\mu_{(r)} = \sum_{x=r} x(x-1)\dots(x-r+1)\frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}} = \frac{n_{(r)}a_{(r)}}{(a+b)_{(r)}} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)a(a-1)\dots(a-r+1)}{(a+b)(a+b-1)\dots(a+b-r+1)} =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}\cdot\frac{a!}{(a-r)!}\cdot\frac{(a+b-r)!}{(a+b)!} \qquad (11.1)$$

Diese Momente existieren jedoch nur unter bestimmten Bedingungen. Beim Typ IV gelten folgende Bedingungen:

$$a < 0$$
$$n < 0$$
$$b > a - 1$$

Wir können einfachheitshalber schreiben

$$f(x) = \frac{\binom{-a}{x}\binom{b}{-n-x}}{\binom{b-a}{-n}}, \quad x = 0, 1, \dots, \qquad (11.2)$$

wobei jetzt a und n positiv jedoch mit negativem Vorzeichen versehen sind. Wenn zwei von drei Parametern der VHG negativ sind, ergeben sich positive Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel 11.1.1. Man leite P_0 und P_1 aus (11.2) ab.

Lösung:

$$P_0 = \frac{\binom{-a}{0}\binom{b}{-n-0}}{\binom{b-a}{-n}} = \frac{\binom{b}{-n}}{\binom{b-a}{-n}} = \frac{b!(b-a+n)!}{(b+n)!(b-a)!}$$

$$= \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(b-a+n+1)}{\Gamma(b-a+1)\Gamma(b+n+1)}$$

wobei $\Gamma(c)$ die Gammafunktion ist (vgl. SL: 220). Im vorletzten Schritt ist dabei durch $(-n)!$ gekürzt worden.

$$P_1 = \frac{\binom{-a}{1}\binom{b}{-n-1}}{\binom{b-a}{-n}} = \frac{(-a)!b!(-n)!(b-a+n)!}{(-a-1)!(-n-1)!(b+n+1)!(b-a)!}$$

$$= \frac{anb!(b-a+n)!}{(b+n+1)!(b-a)!} = \frac{an\Gamma(b+1)\Gamma(b-a+n+1)}{\Gamma(b+n+2)\Gamma(b-a+1)}.$$

Für den Umgang mit der VHG ist die folgende Beziehung sehr nützlich

$$\frac{(-k)!}{(-k-m)!} = \frac{(-1)^m\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)}, \tag{11.3}$$

die wir leicht beweisen können:

$$\begin{aligned}\frac{(-k)!}{(-k-m)!} &= (-k)(-k-1)\ldots(-k-m+1)\\ &= (-1)^m k(k+1)\ldots(k+m-1) \qquad (11.4)\\ &= \frac{(-1)^m(k+m-1)!}{(k-1)!} = \frac{(-1)^m\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)}\end{aligned}$$

Beispiel 11.1.2. Man leite $\mu_{(r)}$ der VHG Typ IV ab und zeige, daß es nur für $r<b-a+1$ existiert.

Lösung: Setzt man in (11.1) a und n mit negativen Vorzeichen ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}\mu_{(r)} &= \frac{(-n)!(-a)!(b-a-r)!}{(-n-r)!(-a-r)!(b-a)!}\\ &= \frac{(-1)^r\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}\cdot\frac{(-1)^r\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(b-a-r+1)}{\Gamma(b-a+1)}\\ &= \frac{\Gamma(n+r)\Gamma(a+r)\Gamma(b-a-r+1)}{\Gamma(n)\Gamma(a)\Gamma(b-a+1)}. \qquad (11.5)\end{aligned}$$

Alle Argumente der Gamma-Funktion sind hier positiv, jedoch ist $b-a-r+1$ nur dann positiv, wenn $b-a+1>r$ gilt.

Übung 11.1.1. Man zeige, daß die Rekursionsformel der VHG Typ IV für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

$$P_{x+1} = \frac{(a+x)(n+x)}{(x+1)(b+n+x+1)}P_x \tag{11.6}$$

lautet.

Übung 11.1.2. Man zeige, daß die inverse Pólya-Verteilung mit der VHG Typ IV identisch ist für $N=b+1$, $M=b+1-a$, $k=n$ und $s=1$ [Man erinnere sich, daß

$$\binom{n+x-1}{x} = \binom{-n}{x}(-1)^x$$

gilt.]

Übung 11.1.3. Man zeige für die VHG Typ IV:

$$\mu_1' = \frac{an}{b-a} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{abn(b-a+n)}{(b-a)^2(b-a-1)} \tag{11.7}$$

(wobei der Nenner größer als 0 sein muß).

11.2. Die Waring-Verteilung

Diese Verteilung erfreut sich in der Linguistik einer großen Beliebtheit. Sie wurde für "Wortverteilungen" von G. Herdan eingeführt, der später auch ausführliche Tabellen zusammengestellt hat (Herdan 1964). Sie läßt sich auf mindestens vier unterschiedliche Weisen ableiten (vgl. Irwin 1965; Patil & Joshi 1968:50). Hier begnügen wir uns damit, daß wir sie als Spezialfall der VHG Typ IV darstellen:

Wenn man in (11.2) $a=1$ setzt, erhält man

$$f(x) = \frac{\binom{-1}{x}\binom{b}{-n-x}}{\binom{b-1}{-n}} = \frac{\frac{(-1)!}{x!(-1-x)!}\frac{b!}{(-n-x)!(b+n+x)!}}{\frac{(b-1)!}{(-n)!(b+n-1)!}}$$

$$= \frac{1}{x!}\cdot\frac{(-1)!}{(-1-x)!}\cdot\frac{(-n)!}{(-n-x)!}\cdot\frac{b!}{(b-1)!}\cdot\frac{(b+n-1)!}{(b+n+x)!}$$

$$= \frac{1}{x!}\frac{(-1)^x(x+1-1)!}{(1-1)!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(-1)^x(n+x-1)!}{(n-1)!}\frac{b}{(b+n+x)(b+n+x-1)\dots(b+n)}$$

$$= \frac{bn(n+1)(n+2)\dots(n+x-1)}{(b+n)(b+n+1)\dots(b+n+x)},$$

wobei insbesondere die Beziehung

$$\frac{(-x)!}{(-x-y)!} = \frac{(-1)^y(x+y-1)!}{(x-1)!}$$

zu beachten ist (vgl. (11.3)). Den letzten Ausdruck kann man in der Form

$$f(x) = \frac{b}{b+n}\cdot\frac{n^{(x)}}{(b+n+1)^{(x)}}, \quad x = 0,1,\dots \tag{11.8}$$

schreiben. Für

$$\begin{aligned} a &:= n, \\ \lambda &:= b+n \end{aligned} \tag{11.9}$$

erhält man die in der linguistischen Literatur übliche Darstellung

$$f(x) = \frac{(\lambda-a)a^{(x)}}{\lambda^{(x+1)}}, \quad x = 0,1,\dots \tag{11.10}$$

Der Einheitlichkeit wegen werden wir jedoch die Form (11.8) benutzen.

Beispiel 11.2.1. Man schreibe P_0 bis P_2 der Waring-Verteilung in beiden Schreibweisen:

Lösung: Laut (11.8) ist

$$P_0 = \frac{b}{b+n}, \quad \text{da} \quad k^{(0)} = 1,$$

$$P_1 = \frac{bn}{(b+n)(b+n+1)},$$

$$P_2 = \frac{bn(n+1)}{(b+n)(b+n+1)(b+n+2)}.$$

Laut (11.10) ist

$$P_0 = \frac{\lambda-a}{\lambda}$$

$$P_1 = \frac{(\lambda-a)a}{\lambda(\lambda+1)},$$

$$P_2 = \frac{(\lambda-a)a(a+1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}.\bullet$$

Die Ableitung der Waring-Verteilung aus der VHG Typ IV ist auch deswegen praktisch, weil man beim Umgang mit dieser Verteilung auf bereits bekannte Techniken zurückgreifen kann. So müßte man sich z.B. bei der Berechnung der Momente an eine andere Summationstechnik gewöhnen (vgl. z.B. Saxena 1971), bei der Kenntnis der Herkunft dieser Verteilung reicht es aber aus, in die bekannten Resultate der VHG Typ IV $a = 1$ einzusetzen.

In der Linguistik wird üblicherweise die **1-verschobene** Form der **Waring-Verteilung** benutzt, die als

$$f(x) = \frac{b}{b+n}\frac{n^{(x-1)}}{(b+n+1)^{(x-1)}}, \quad x = 1,2,\dots \tag{11.11a}$$

bzw.

$$f(x) = \frac{(\lambda - a)a^{(x-1)}}{\lambda^{(x)}}, \quad x = 1, 2, \ldots \tag{11.11b}$$

geschrieben werden kann.

Die **Rekursionsformel** für (11.8) ergibt sich aus der Berechnung des Quotienten P_{x+1}/P_x zu

$$P_{x+1} = \frac{n+x}{b+n+x+1} P_x, \tag{11.12}$$

was man auch aus (11.6) durch Einsetzung von $a = 1$ bekommt.

Auf ähnliche Weise erhält man auch die **faktoriellen Momente** aus (11.5) als ($a = 1$)

$$\mu_{(r)} = \frac{\Gamma(n+r)\Gamma(1+r)\Gamma(b-r)}{\Gamma(n)\Gamma(b)}, \tag{11.13}$$

woraus insbesondere

$$\begin{aligned} \mu_{(1)} = \mu_1' &= \frac{n!1!(b-2)!}{(n-1)!(b-1)!} = \frac{n}{b-1}, \\ \mu_{(2)} &= \frac{(n+1)!2!(b-3)!}{(n-1)!(b-1)!} = \frac{2n(n+1)}{(b-1)(b-2)} \end{aligned} \tag{11.14}$$

und daraus

$$\mu_2 = \mu_{(2)} + \mu_{(1)} - \mu_{(1)}^2 = \frac{bn(b+n-1)}{(b-1)^2(b-2)}, \tag{11.15}$$

folgt, was sich auch direkt aus (11.7) ergibt.

Die **Schätzung** der Koeffizienten b und n kann folgendermaßen erfolgen:

a) Aus

$$P_0 = \frac{b}{b+n} \quad \text{und} \quad \mu_1' = \frac{n}{b-1}$$

folgt

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\bar{x} f_0}{(\bar{x}+1)f_0 - N} \\ \hat{n} &= \frac{\bar{x}(n - f_0)}{(\bar{x}+1)f_0 - N}, \end{aligned} \tag{11.16}$$

wobei f_0 die (absolute) Häufigkeit in der nullten Klasse und N der Stichprobenumfang ist.

Bei der **1-verschobenen Waring-Verteilung** muß die Verschiebung berücksichtigt werden. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{b}{b+n} \\ \mu_1' &= \frac{n}{b-1} + 1, \end{aligned}$$

so daß in (11.16) $\bar{x}$ durch $\bar{x} - 1$ und f_0 durch f_1 zu ersetzen ist.

So ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{(\bar{x}-1)f_1}{\bar{x} f_1 - N}, \\ \hat{n} &= \frac{(\bar{x}-1)(N - f_1)}{\bar{x} f_1 - N} \end{aligned} \tag{11.17}$$

Beispiel 11.2.2. Ch. Muller (1969) untersuchte die Zahl der Wörter (f_x), die mit der Häufigkeit x in P. Corneilles *Illusion Comique*, Teil Comédie, vorkommen und erhielt die empirische Verteilung in Tabelle 11.1 (erste und zweite Spalte). Man versuche, an diese Daten die Waring-Verteilung anzupassen.

Tabelle 11.1.
Worthäufigkeitsverteilung in Corneilles *Illusion Comique: Comédie* (nach Muller 1969)

Häufigkeit x	Zahl der Wörter mit Häufigkeit x f_x	Waring-Verteilung NP_x
1	718	717,90
2	248	263,85
3	132	133,97
4	91	79,99
5	45	52,71
6	35	37,13
7	32	27,45
8	20	21,04
9	12	16,59
10	10	13,39
11	13	11,02
12	13	9,21
13	3	7,80
14	10	6,68
15	5	5,78
16	8	5,05
≥ 17	82	65,44
$\sum$	1477	1477,00

Lösung: Um $\bar{x}$ korrekt berechnen zu können, muß man entweder alle Häufigkeiten oder zumindest die gesamte Textlänge kennen, die Muller als $\sum_x x f_x = 10010$ angibt. Daher ist

$$\bar{x} = \frac{10010}{1477} = 6,7773.$$

Laut (11.17) ergibt sich also

$$\hat{b} = \frac{(6,7773-1)718}{(6,7773)718-1477} = 1,22$$

$$\hat{n} = \frac{(6,7773-1)(1477-718)}{(6,7773)718-1477} = 1,29.$$

Daraus folgt

$$NP_1 = 1477\frac{1,22}{1,22+1,29} = 717,90$$

und mit Hilfe der Rekursionsformel

$$NP_2 = \frac{1,29+0}{1,22+1,29+0+1}717,90 = \frac{1,29}{3,51}717,90 = 263,85,$$

$$NP_3 = \frac{2,29}{4,51}263,85 = 133,97,$$

$$NP_4 = \frac{3,29}{5,51}133,97 = 79,99$$

usw. Alle Werte NP_x sind in der dritten Spalte der Tabelle 11.1 angegeben. Man bedenke, daß in der Rekursionsformel (11.12) wegen der Verschiebung statt x immer $x-1$ zu setzen ist. Die Anpassung ist gut.

Die Schätzungen (11.17) lassen sich auch philologisch gut interpretieren. Mit den Bezeichnungen

$L =$ gesamte Textlänge ($\sum xf$)
$V =$ Vokabularumfang (N)
$V_1 =$ Zahl der Wörter mit Häufigkeit $x = a$ (hapax legomena, f_1), ergibt sich wegen

$$\bar{x} = L/V$$

für die 1-verschobene Waring-Verteilung:

$$\hat{b} = \frac{(L-V)V_1}{LV_1 - V^2}$$
$$\hat{n} = \frac{(L-V)(V-V_1)}{LV_1 - V^2}. \qquad (11.18)$$

Es ist leicht zu zeigen, daß die Waring-Verteilung gegen die **geometrische Verteilung** konvergiert für

$$b \longrightarrow \infty$$
$$n \longrightarrow \infty$$
$$\frac{b}{b+n} = p.$$

Laut (11.8) ist

$$f(x) = \frac{b}{b+n} \cdot \frac{n(n+1)\dots(n+x-1)}{(b+n+1)(b+n+2)\dots(b+n+x)}$$

$$= \frac{b}{b+n} \frac{\frac{n}{b+n}\frac{n+1}{b+n}\cdots\frac{n+x-1}{b+n}}{\frac{b+n+1}{b+n}\frac{b+n+2}{b+n}\cdots\frac{b+n+x}{b+n}}$$

Die Faktoren im Zähler konvergieren dabei gegen $q = 1-p = \frac{n}{b+n}$, während alle Faktoren im Nenner gegen 1 konvergieren. Somit gilt

$$\lim f(x) = pq^x,$$

was die WF der geometrischen Verteilung darstellt.

Übung 11.2.1. Man zeige, daß sich die Waring-Verteilung (11.8) auch folgendermaßen darstellen läßt:

$$f(x) = \frac{b}{x+1} \cdot \frac{\binom{n+x-1}{x}}{\binom{b+n+x}{x+1}}, \quad x = 0, 1, \dots$$

Übung 11.2.2. Man zeige, daß man das r-te faktorielle Moment der Waring-Verteilung auch in der Form

$$\mu_{(r)} = \frac{r!n^{(r)}}{(b-1)_{(r)}}$$

darstellen kann.

Übung 11.2.3. Bennett (1969) hat im zweiten Akt von Shakespeares "As you like it" die Zahl der Nomina (f_x) die x-mal vorkommen, berechnet und bekam folgende Werte:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	24
f_x	333	49	26	16	6	4	3	2	2	1	1	2

Man untersuche, ob die Daten durch eine Waring-Verteilung angepaßt werden können.

11.3. Die Yule-Verteilung

Ein anderer Spezialfall der VHG Typ IV ist die Yule-Verteilung, die dadurch entsteht, daß man

$$a = 1$$
$$n = 1$$

setzt, d.h. die Yule-Verteilung ist gleichzeitig ein Spezialfall der Waring-Verteilung für $n = 1$. So bekommt man

$$f(x) = \frac{\binom{-1}{x}\binom{b}{-1-x}}{\binom{b-1}{-1}} = \frac{(-1)!b!(-1)!b!}{x!(-1-x)!(-1-x)!(b+x+1)!(b-1)!}$$

Unter Verwendung von (11.3) ergibt sich

$$f(x) = \frac{(-1)^x x!b!(-1)^x x!b!}{x!(b+x+1)!(b-1)!},$$

woraus man durch Kürzungen schließlich

$$f(x) = \frac{bx!}{(b+x+1)_{(x+1)}} = \frac{bx!}{(b+1)^{(x+1)}}, \quad x = 0,1,\ldots \tag{11.19}$$

erhält. In der linguistischen Literatur wird jedoch üblicherweise die 1-verschobene Yule-Verteilung benutzt, deren WF (vgl. Übung 11.3.1) als

$$f(x) = \frac{b(x-1)!}{(b+x)_{(x)}} = \frac{b(x-1)!}{(b+1)^{(x)}}, \quad x,1,2,\ldots \tag{11.20}$$

definiert wird. Über die Yule-Verteilung ist umfangreiche Literatur vorhanden, z.B. Kendall (1961), Irwin (1965), Simon (1955), Horvarth (1963), Haight (1966) mit teilweise linguistischen Anwendungen.

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der **1-verschobenen Yule-Verteilung** lauten

$$P_1 = \frac{b}{b+1}$$

$$P_2 = \frac{b}{(b+1)(b+2)}$$

$$P_3 = \frac{2!b}{(b+1)(b+2)(b+3)}$$

$$P_4 = \frac{3!b}{(b+1)(b+2)(b+3)(b+4)}$$

usw.

Die **Rekursionsformeln** ergeben sich aus den Formeln der Waring-Verteilung für $n = 1$. Für die nicht verschobene Verteilung gilt

$$P_{x+1} = \frac{x+1}{b+x+2}P_x, \tag{11.21}$$

für die 1-verschobene Verteilung erhält man

$$P_{x+1} = \frac{x}{b+x+1}P_x. \tag{11.22}$$

Die **faktoriellen Momente** ergeben sich aus (11.13) als

$$\mu_{(r)} = \frac{\Gamma^2(r+1)\Gamma(b-r)}{\Gamma(b)} = \frac{(r!)^2}{(b-1)(b-2)\ldots(b-r)} \tag{11.23}$$

für $b>r$.

Beispiel 11.3.1. Man leite $\mu_{(1)}$, $\mu_{(2)}$ und μ_2 der Yule-Verteilung mit dem Parameter $b \in \mathbb{N}$ ab.

Lösung: Nach (11.23) ergibt sich:

$$\mu_{(1)} = \frac{1}{b-1} \quad \text{für} \quad b > 1,$$

$$\mu_{(2)} = \frac{4}{(b-1)(b-2)} \quad \text{für} \quad b > 2,$$

$$\mu_2 = \mu_{(2)} + \mu_{(1)} - \mu_{(1)}^2 = \frac{4}{(b-1)(b-2)} + \frac{1}{(b-1)} - \frac{1}{(b-1)^2}$$

$$= \frac{b^2}{(b-1)^2(b-2)} \quad \text{für} \quad b > 2.$$

Für die **1-verschobene Yule-Verteilung** erhalten wir die **faktoriellen Momente** folgendermaßen:

$$\mu_{(r)} = \sum_x x(x-1)\ldots(x-r+1)\frac{\binom{-1}{x-1}\binom{b}{-x}}{\binom{b-1}{-1}}.$$

Um kürzen zu können, schreiben wir $x = (x-r)+r$ und erhalten

$$\mu_{(r)} = \sum_x [(x-r)+r](x-1)\dots(x-r+1)f(x)$$

$$= \sum_x r(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)f(x)+$$

$$+\sum_x (x-1)(x-2)\dots(x-r+1)(x-r)f(x).$$

Aus dem $f(x)$ unter der ersten Summe klammern wir $(r-1)$, aus dem $f(x)$ unter der zweiten Summe r faktorielle Multiplikatoren aus, so daß

$$\mu_{(r)} = \frac{r(-1)_{(r-1)}(-1)_{(r-1)}}{(b-1)_{(r-1)}} \sum_{x\geq r} \frac{\binom{-r}{x-r}\binom{b}{-x}}{\binom{b-r}{-r}} +$$

$$+\frac{(-1)_{(r)}(-1)_{(r)}}{(b-1)_{(r)}} \sum_{x\geq r+1} \frac{\binom{-r-1}{x-r-1}\binom{b}{x}}{\binom{b-r-1}{-r-1}}.$$

Die Summen haben jeweils den Wert 1. Weiter ist

$$(-1)_{(r-1)} = (-1)^{r-1}1^{(r-1)} = (-1)^{r-1}(r-1)!,$$

so daß sich

$$\mu_{(r)} = \frac{r\left[(r-1)!\right]^2}{(b-1)_{(r-1)}} + \frac{(r!)^2}{(b-1)_{(r)}}$$

$$= \frac{r\left[(r-1)!\right]^2(b-r)+(r!)^2}{(b-1)(b-2)\dots(b-r)} \tag{11.24}$$

$$= \frac{br\left[(r-1)!\right]^2}{(b-1)_{(r)}}$$

ergibt, was man auch direkt aus dem $\mu_{(r)}$ der 1-verschobenen Waring-Verteilung erhält (vgl. Aufgabe 11.3).

Beispiel 11.3.2. Man leite $\mu_{(1)}$, $\mu_{(2)}$ und μ_2 der 1-verschobenen Yule-Verteilung ab.

Lösung: Aus (11.24) folgt

$$\mu_{(1)} = \frac{b}{b-1}$$

(also $\mu_{(1)} = \mu_{(1)}$ (Yule) $+1$). Weiter ist

$$\mu_{(2)} = \frac{2b}{(b-1)(b-2)},$$

woraus schließlich

$$\mu_2 = \mu_{(2)} + \mu_{(1)} - \mu_{(1)}^2 = \frac{b^2}{(b-1)^2(b-2)}$$

wie bei der nichtverschobenen Yule-Verteilung folgt. •

Die **Schätzung** des Parameters b kann bei der 1-verschobenen Yule-Verteilung

(a) aus der Häufigkeit der ersten Klasse erfolgen; wegen

$$P_1 = \frac{b}{b+1}$$

ergibt sich

$$\hat{b} = \frac{f_1/N}{1-f_1/N} = \frac{f_1}{N-f_1}. \tag{11.25}$$

(b) aus dem ersten Moment (vgl. Beispiel 11.3.2.) berechnet werden:

$$\hat{b} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-1}. \tag{11.26}$$

(c) aus der Beziehung

$$\frac{P_1}{P_2} = b+2$$

ermittelt werden:

$$\hat{b} = \frac{f_1}{f_2} - 2. \qquad (11.27)$$

Da b eine positive Zahl ist, sieht man, daß die Yule-Verteilung dann angepaßt werden kann, wenn $f_1 > 2f_2$ gilt.

Beispiel 11.3.3. Bennett (1969: 32) hat im 1. Akt von Julius Caesar (Shakespeare) folgende Häufigkeiten der Wortwahlen gefunden:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	37	N
f_x	272	63	18	5	4	7	2	2	1	3	1	1	1	380

Man versuche, die Yule-Verteilung anzupassen.

Lösung: Wir benutzen die 1-verschobene Verteilung und schätzen den Parameter b mit der Methode (c), d.h.

$$b = \frac{f_1}{f_2} - 2 = \frac{272}{63} - 2 = 2,3175.$$

Daraus ergibt sich mit $N = 380$ (vgl. (11.22)):

$$NP_1 = N\frac{b}{b+1} = 380\frac{2,3175}{3,3175} = 265,46$$

$$NP_2 = \frac{1}{2,3175+2}265,46 = 61,48$$

$$NP_3 = \frac{2}{5,3175}61,48 = 23,13$$

$$NP_4 = \frac{3}{6,3175}23,13 = 10,98$$

$$NP_5 = 6,00$$

$$NP_6 = 3,61$$

$$NP_7 = 2,32$$

$$NP_8 = 7,02.$$

Die Anpassung ist gut, wie man sich mit einem Chi-quadrat-Test überzeugen kann (vgl. I: 20).

Übung 11.3.1. Man leite die 1-verschobene Yule-Verteilung aus der VHG Typ IV ab.

Übung 11.3.2. Man berechne P_1 bis P_4 der 1-verschobenen Yule-Verteilung mit dem Parameter $b = 2$.

Übung 11.3.3. Muller (1969: 46) gibt die Worthäufigkeitsverteilung von Corneilles *l'Illusion Comique* folgendermaßen an:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_x	845	318	165	118	70	58	50	31	31	23	17	14	10	8

x	15	16	17	18	19	20	21	$\sum$
f_x	11	12	5	4	4	4	108	1906

Man passe eine Yule-Verteilung an. [Man benutze die Schätzung (a).]

Benutzte und weiterführende Literatur

Bennett (1969); Haight (1966); Herdan (1964); Horvarth (1963); Irwin (1965); Johnson, Kotz (1969); Kemp, Kemp (1956); Kendall (1961); Martin (1974); Muller (1969); Patil, Joshi (1968); Simon (1955, 1960); Těšitelová (1972).

Aufgaben

11.1. R. Martin (1974) hat im einsprachigen französischen Wörterbuch die Zahl der Wörter untersucht, die als definierende Synonyme (DS) die Stichwörter erklären. So wurde festgestellt, daß 159 DS 1 mal vorkommen, 71 DS 2 mal vorkommen usw. Die Resultate der Zählung sind wie folgt:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f_x	159	71	33	23	18	8	8	8	5	5	6	2	1

x	14	15	16	18	20	23	24	27	28	30	31	36	40
f_x	1	2	1	3	3	1	1	2	1	1	1	1	1

x	43	84	146
f_x	1	1	1

Man stelle fest, ob die Daten durch eine Waring-Verteilung angepaßt werden können.

11.2. Man leite die Rekursionsformel für Wahrscheinlichkeiten der 1-verschobenen Waring-Verteilung ab.

11.3. Man leite $\mu_{(r)}$ der 1-verschobenen Waring-Verteilung ab.

11.4. Man zeige, daß für die 1-verschobene Waring-Verteilung

$$\mu_{(1)} = \frac{b+n-1}{b-1},$$

$$\mu_{(2)} = \frac{2n(b+n-1}{(b-1)(b-2)},$$

$$\mu_2 = \frac{bn(b+n-1)}{(b-1)^2(b-2)}$$

gilt.

11.5. Bennett (1969: 39) ermittelte die Worthäufigkeitsverteilung im 5. Akt und im Epilog von "As you like it" von Shakespeare wie folgt:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	22	$\sum$
f_x	211	44	18	14	7	4	5	3	1	1	1	1	1	311

Man passe die Waring-Verteilung und die Yule-Verteilung an.

11.6. Man zeige für die VHG IV die folgenden Konvergenzen:

(a) Für $a \to \infty$, $b \to \infty$ mit $(b-a)/b = p$ (falls $b - a > 0$) konvergiert sie gegen die negative Binomialverteilung mit den Parametern n und p.

(b) Für $b \to \infty$, $n \to \infty$, mit $b/(b+n) = p$ konvergiert sie gegen die negative Binomialverteilung mit den Parametern a und p.

11.7. M. Těšitelová (1972) analysierte die Worthäufigkeiten in K. Čapeks Werk mit den Textlängen L = 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 und bekam folgende Resultate:

x	$L = 500$	$L = 1000$	$L = 2000$	$L = 3000$	$L = 4000$	$L = 5000$
1	248	387	521	729	864	956
2	30	79	121	152	196	231
3	10	20	46	64	78	94
4	4	8	19	38	37	41
5	1	7	13	22	30	43
6	2	4	12	19	23	25
7	2	0	4	9	19	18
8	2	2	3	3	8	11
9	0	4	2	4	3	8
10	0	1	6	6	4	8
≥ 11	7	13	23	35	52	65
	306	525	770	1081	1341	1500

Man versuche, jeweils die Waring-Verteilung anzupassen.

11.8. Man leite (11.11a) (die WF der 1-verschobenen Waring-Verteilung) aus der 1-verschobenen VHG IV ab.

11.9. Man zeige, daß für die faktoriellen Momente der Waring-Verteilung (11.8) die folgende Beziehung gilt:

$$\mu_{(r+1)} = \frac{(n+r)(r+1)}{(b-r-1)}\mu_{(r)}.$$

[Man berechne $\mu_{(r+1)}/\mu_{(r)}$ aus (11.13) und ordne.]

11.10. Man zeige, daß man $\mu_{(r)}$ der 1-verschobenen Yule-Verteilung auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\mu_{(r)} = \frac{br!(r-1)!}{(b-r)^{(r)}}$$

(vgl. 11.24).

Lösungen

Kapitel 7

Übungen

7.1.1. Mit Hilfe der Rekursionsformel erhält man

$$P_0 = \binom{n}{0} \frac{(N-M)\ldots[N-M+(n-1)s]}{N\ldots[N+(n-1)s]}$$
$$= \frac{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14}{10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19} = 0.1559$$
$$P_1 = \frac{nM}{1 \cdot [N-M+(n-1)s]} \cdot P_0$$
$$= \frac{4 \cdot 5}{5+3 \cdot 3} \cdot P_0 = 0.2227$$
$$P_2 = \frac{(n-1)(M+s)}{2 \cdot [N-M+(n-2)s]} P_1$$
$$= \frac{3 \cdot 8}{2[5+2 \cdot 3]} \cdot P_1 = 0.2429$$

7.1.2. Formel (7.5d) ergibt sich unmittelbar aus der genannten Substitution.

7.1.3. Die Behauptung ergibt sich aus der Beziehung

$$x < \frac{(M-s)(n+1)}{N-2s} - 1 \Longleftrightarrow P_{x+1} > P_x,$$

die man wie folgt aus der Rekursionsformel ableitet:

$$P_{x+1} > P_x \Longleftrightarrow$$
$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{(n-x)(M+xs)}{(x+1)[N-M+(n-x-1)s]} > 1 \Longleftrightarrow$$
$$nM + nxs - xM - x^2 s > xN - xM + xsn - x^2 s - xs$$
$$+ N - M + ns - xs - s \Longleftrightarrow$$
$$nM > xN - xs + N - M + ns - xs - s \Longleftrightarrow$$
$$nM - N + M - ns + s > xN - xs - xs \Longleftrightarrow$$
$$(M-s)(n+1) - (N-2s) > x(N-2s) \Longleftrightarrow$$
$$\frac{(M-s)(n+1)}{N-2s} - 1 > x$$

7.1.4. Die genannte Substitution ergibt

$$P_{x+1} = \frac{(n-x)(pN+xaN)}{(x+1)(N-pN+(n-x-1)aN)} P_x.$$

Kürzen durch N liefert (7.6).

7.2.1. Man erhält

$$\mu_1' = Z(1,1)\frac{pn}{1} = pn$$
$$= \frac{3}{4} \cdot 3 = 2,25$$
$$\mu_2 = \frac{npq(1+na)}{1+a} = \frac{3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\left(1+3 \cdot \frac{1}{5}\right)}{1+\frac{1}{5}}$$
$$= 0.75 \quad \text{(vgl. Bsp. 7.2.3).}$$

7.2.2. Formel (7.17) ergibt

$$\mu_3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (-pn)^{3-k} \mu'_k$$

$$= \binom{3}{0}(-pn)^3 \cdot 1 + \binom{3}{1}(-pn)^2 pn$$

$$+ \binom{3}{2}(-pn)^1 \left[np + \frac{p(p+a)n(n-1)}{1+a}\right]$$

$$+ \binom{3}{3}(-pn)^0 \left[np + \frac{3p(p+a)n(n-1)}{1+a}\right.$$

$$\left. + \frac{p(p+a)(p+2a)n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)}\right]$$

$$= -p^3n^3 + 3p^3n^3 - 3pn\left[pn + \frac{p(p+a)n(n-1)}{1+a}\right]$$

$$+ np + \frac{3p(p+a)n(n-1)}{1+a} + \frac{p(p+a)(p+2a)n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)}$$

$$= 2p^3n^3 - 3p^2n^2 - 3pn\frac{p(p+a)n(n-1)}{1+a}$$

$$+ np + \frac{3p(p+a)n(n-1)}{1+a} + \frac{p(p+a)(p+2a)n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)}$$

Die Übereinstimmung mit dem genannten Ausdruck zeigt man durch Gleichsetzen, Multiplikation der Gleichung mit $(1+a)(1+2a)$ und Vereinfachung. Analog beweist man die Formel für μ_4.

Nach SL (5.28) gilt folglich

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{npq(q-p)(1+na)(1+2na)}{(1+a)(1+2a)} \left(\frac{1+a}{npq(1+na)}\right)^{3/2},$$

woraus die genannte Formel durch Kürzung der entsprechenden Faktoren folgt.

Die Formel für γ_2 erhält man unmittelbar durch Einsetzen der obigen Terme für μ_3 und μ_4 in SL (5.29).

7.3.1.

$$p' = 0{,}1486 \quad q = 0{,}8514$$
$$a = 0{,}5891 \quad n = 6$$

$$NP_1 = 144{,}57$$
$$NP_2 = 33{,}95$$
$$NP_3 = 19{,}52$$
$$NP_4 = 13{,}19$$
$$NP_5 = 9{,}34$$
$$NP_6 = 6{,}50$$
$$NP_7 = 3{,}93$$

7.3.2. a)

$$f(x) = \frac{\binom{\frac{-p}{a}}{x-1}\binom{\frac{-q}{a}}{n-x+1}}{\binom{\frac{-1}{a}}{n}} \quad \text{für } x = 1, \ldots n+1$$

$$\mu_{(1)} = \sum_{x=1}^{n+1} x f(x) = \sum_{x=1}^{n+1} [(x-1)+1]\, f(x)$$

$$= \frac{\frac{-p}{a}n}{\frac{-1}{a}} \sum_{x=1}^{n+1} \binom{\frac{-p}{a}-1}{x-2}\binom{\frac{-q}{a}}{n-x+1} \Big/ \binom{\frac{-1}{a}-1}{n-1} + \sum_{x=1}^{n+1} f(x)$$

$$= np + 1$$

$$\mu_{(2)} = \sum_{x=1}^{n+1} x(x-1)f(x) = \sum_{x=1}^{n+1} [(x-1)(x-2) + 2(x-1)]\, f(x) =$$

$$= \frac{p(p+a)n(n-1)}{1+a} + 2np$$

$$\mu_{(3)} = \sum_{x=1}^{n+1} x(x-1)(x-2)f(x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{n+1} [(x-1)(x-2)(x-3) + 3(x-1)(x-2)]\, f(x)$$

$$= \frac{p(p+a)(p+2a)n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)} + \frac{3p(p+a)n(n-1)}{1+a}$$

b) folgt aus a).

c) Setzt man $\mu_{(1)}$, $\mu_{(2)}$, $\mu_{(3)}$ in (7.28) ein, so ergeben sich die Ausdrücke (7.26).

d) Die Pólya-Verteilung ist für diese Daten nicht geeignet.

7.4.1.

$$\mu_2' = np + \frac{p(p+a)n(n-1)}{1+a}$$

Für $s = 0$ gilt auch $a = 0$ und somit

$$\mu_2' = np + p^2 n(n-1).$$

7.4.2. Aus

$$\mu_3' = np + \frac{3p(p+a)n(n-1)}{1+a} + \frac{p(p+a)(p+2a)n(n-1)(n-2)}{(1+a)(1+2a)}$$

folgt für $s = -1$, d.h. $a = -\dfrac{1}{N}$:

$$\mu_3' = np + \frac{3p\left(p-\frac{1}{N}\right)n(n-1)}{1-\frac{1}{N}} + \frac{p\left(p-\frac{1}{N}\right)\left(p-\frac{2}{N}\right)n(n-1)(n-2)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)}$$

$$= np + \frac{3p(pN-1)n(n-1)}{N-1} + \frac{p(Np-1)(Np-2)n(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}$$

Dies stimmt offenbar mit (5.8) überein.

7.4.3. Aus $N = N - M = s$ folgt insbesondere $N = 2s$, $p = a = \dfrac{1}{2}$, d.h. es gilt

$$\mu_3' = \frac{n}{2} + \frac{\frac{3}{2}n(n-1)}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot n(n-1)(n-2)}{\frac{3}{2}\cdot 2}$$

$$= \frac{n}{2} + n(n-1) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{4}$$

Andererseits gilt auch für die diskrete Rechteckverteilung

$$\mu_3' = \frac{1}{n+1}\sum_{x=1}^{n} x^3 = \frac{n^2(n+1)}{4}$$

7.5.1.

$$\frac{(-k)!}{(-k-x)!} = \binom{-k}{x}x! = (-1)^x\binom{k+x-1}{x}x!$$

$$= (-1)^x\frac{(k+x-1)!}{(k-1)!x!}x! = (-1)^x\frac{(k+x-1)!}{(k-1)!}$$

7.5.2.

$$P_{x+1} = \frac{(k+x)(N-M+xs)}{(x+1)[N+(k+x)s]} P_x$$
$$= \frac{(k+x)(q+xa)}{(x+1)(1+(k+x)a)} P_x$$

7.5.3. Aus (7.36) folgt nach Kürzung

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{k+x}{x+1} \frac{N-M+xs}{N+(k+x)s}.$$

Unter der Voraussetzung $N + (k+x)s > 0$ für $x = 0, 1, \ldots$ folgt daraus

$$P_{x+1} > P_x \iff$$
$$\frac{k+x}{x+1} \frac{n-M+xs}{N+(k+x)s} > 1 \iff$$
$$(k+x)(N-M+xs) > (x+1)(N+(k+x)s) \iff$$
$$x(M+s) < kN - kM - N - ks \iff$$
$$x < \frac{N(k-1)}{N+s} - k$$

Für den Modus x_M gilt folglich

$$\frac{N(k-1)}{M+s} - k \le x_M \le \frac{N(k-1)}{M+s} - k + 1.$$

7.5.4. a)

$$P_0 = \frac{M(M+s)\ldots[M+(k-1)s]}{N(N+s)\ldots[N+(k-1)s]}$$
$$P_0 = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7} = 0,4286$$
$$P_1 = 0,1905$$
$$P_2 = 0,1039$$
$$P_3 = 0,0639$$
$$P_4 = 0,0425$$
$$P_5 = 0,0300$$

b)

$$P_0 = \frac{p(p+a)\ldots[p+(k-1)a]}{(1+a)\ldots[1+(k-1)a]} = \frac{0,6 \cdot 1,1}{1,5} = 0,44$$
$$P_1 = 0,1760$$
$$P_2 = 0,0950$$
$$P_3 = 0,0802$$
$$P_4 = 0,0688$$
$$P_5 = 0,0598$$

Aufgaben

7.1. $x_M = 1$

7.2. $P_2 = \frac{5}{18}$

7.3.

$$\mu_1' = \frac{nM}{N}$$

$$\mu_2' = \frac{nM}{N} + \frac{M(M+s)n(-1)}{N(N+s)}$$

$$\mu_3' = \frac{nM}{N} + \frac{3M(M+s)n(n-1)}{N(N+s)}$$

$$+ \frac{M(M+s)(M+2s)n(n-1)(n-2)}{N(N+1)(N+2s)}$$

$$\mu_4' = \frac{nM}{N} + \frac{7M(M+s)n(n-1)}{N(N+s)}$$

$$+ \frac{6M(M+s)(M+2s)n(n-1)(n-2)}{N(N+s)(N+2s)}$$

$$+ \frac{M(M+s)(M+2s)(M+3s)n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(N+s)(N+2s)(N+3s)}$$

7.4. $\mu_1' = 1 \qquad \mu_2' = \frac{13}{8} \qquad \mu_3' = \frac{23}{8} \qquad \mu_4' = \frac{43}{8}.$

7.5. Für $\frac{M}{N} = 0{,}5$, d.h. $M = N - M = \frac{N}{2}$ gilt

$$P_x = \binom{n}{x} \frac{M \ldots [M + (x-1)s] M \ldots [M + (n-x-1)s]}{N \ldots [N + (n-1)s]}$$

Somit gilt $P_x = P_{n-x}$, d.h. die Verteilung ist symmetrisch.

7.6. Die Behauptung folgt u.a. aus (7.2.b), (7.2.d) und (7.5.d) und der Definition des Binomialkoeffizienten.

7.7.

$$\mu_1' = \sum_{x=1}^{n+1} ((x-1)+1) \frac{\binom{-\frac{p}{a}}{x-1}\binom{-\frac{q}{a}}{n-x+1}}{\binom{-\frac{1}{a}}{n}}$$

$$= np + 1 \quad (\text{vgl. } (7.12)).$$

7.8. Die Rekursionsformel ergibt sich durch Berechnung von $\frac{P_{x+1}}{P_x}$ mittels (7.42e).

7.9. Für $s = -1$, d.h. für $a = -\frac{1}{N}$ erhält man aus (7.19):

$$\mu_3 = \frac{npq(q-p)\left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 - \frac{2n}{N}\right)}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)}$$

$$= \frac{npq(q-p)(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}$$

(vgl. (5.9)).

7.10. Für $s = 0$, d.h. $a = 0$ liefert (7.18):

$$\mu_2 = npq \quad (\text{vgl. } (1.8)).$$

7.11. Man erhält die theoretischen Häufigkeiten

$P_1 = 99{,}7$	$P_2 = 76{,}4$	$P_3 = 53{,}4$	$P_4 = 34{,}5$
$P_5 = 20{,}3$	$P_6 = 10{,}4$	$P_7 = 4{,}3$	$P_8 = 1{,}1$

7.12.

$$\mu_1' = \sum_{x=0}^{n} x\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1)\frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\mu_2 = \sum_{x=0}^{n}\left(x-\frac{n}{2}\right)^2\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{x=0}^{n} x^2 - n\sum_{x=0}^{n} x + \frac{n^2}{4}\sum_{x=0}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) - \frac{n^2}{2}(n+1) + \frac{n^2}{4}(n+1)\right]$$

$$= \frac{n}{12}(n+2)$$

Aus (7.18) folgt für $s = M = N - M$, d.h. für $a = p = q = \frac{1}{2}$:

$$\mu_2 = \frac{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{n}{12}(n+2)$$

7.13. Aus (7.5a) folgt zunächst für $a \to 0$:

$$P_x = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}.$$

Für $\lambda = np$ folgt daraus

$$P_x = \frac{n(n-1)\ldots(n-(x-1))}{x!n^x}\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}\lambda^x\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x},$$

was für $n \to \infty$ gegen $\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ konvergiert.

7.14.

$$\gamma_1 = \frac{(q-p)(1+2na)\sqrt{1+a}}{(1+2a)\sqrt{npq(1+na)}}$$

Aufgrund von (7.35) konvergiert die Wurzel im Nenner gegen $\sqrt{\lambda}$, alle anderen Funktionen konvergieren gegen 1. Also konvergiert γ_1 gegen $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Entsprechend gilt für γ_1 der Poisson-Verteilung:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{(vgl. (2.13), (2.14))}$$

(Man beachte $\lambda = a$).

7.15. Offenbar konvergiert

$$\mu_2 = \frac{npq(1+na)}{1+a} \quad \text{gegen}$$

$$\frac{\lambda\cdot 1(1+\theta)}{1} = \lambda(1+\theta).$$

Für $\lambda = kP$, $\theta = P$ stimmt dies mit (4.12a) überein.

7.16. Die inverse Pólya-Verteilung ergibt für $s = 0$ bzw. $a = 0$:

$$f(x) = \binom{k+x-1}{x}\frac{M^k(N-M)^x}{N^{k+x}}$$

$$= \binom{k+x-1}{x}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(\frac{N-M}{N}\right)^x \quad \text{(vgl. (4.1))}.$$

7.17. Aus (7.41) folgt für $a = 0$:

$$\mu_2 = \frac{kqp}{p^3} = \frac{kq}{p^2} = kPQ$$

7.18. Die Behauptung folgt, indem man alle Faktoren in (7.36) durch N teilt und $s = 0$ bzw. $a = 0$ einsetzt (vgl. Aufg. 7.16).

7.19. Nach Einsetzung von $s = -1$ in (13.36) ergibt sich

$$P_x = \binom{k+x-1}{x} \frac{M(M-1)\ldots(M-k+1)(N-M)\ldots(N-M-x+1)}{N(N-1)\ldots(N-k-x+1)}$$

$$= \binom{k+x-1}{x} \frac{M!(N-M)!}{(M-k)!(N-M-x)!} \frac{N-k-x)!}{N!}$$

$$= \binom{k+x-1}{x}\binom{N-k-x}{M-k} \Big/ \binom{N}{M} \quad \text{(vgl. 5.19c)}$$

7.20. Aus 7.41 folgt für $s = -1$ bzw. $a = -\frac{1}{N}$:

$$\mu_1' = \frac{kq}{p-a} = \frac{k\frac{N-M}{N}}{\frac{M}{N}+\frac{1}{N}} = \frac{k(N-M)}{M+1}$$

7.21. In (7.37) ersetze man q durch $\frac{\lambda}{k}$, p durch $1-\frac{\lambda}{k}$. Für $a \to 0$, $ka \to 0$ erhält man zunächst

$$P_x = \binom{k+x-1}{x}\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)^k \left(\frac{\lambda}{k}\right)^x$$

Für $k \to \infty$ folgt daraus wie bei der Konvergenz der negativen Binomialverteilung (vgl. Abschnitt 4.4):

$$P_x = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

7.22. Aus (7.41) folgt für $a = 0$:

$$\mu_2 = \frac{kq}{p^2} = \frac{\lambda}{\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$\mu_2 = \lambda \quad \text{für } k \to 0 \quad \text{(vgl. (2.13))}.$$

7.23. Für die inverse hypergeometrische Verteilung gilt (vgl. (5.22)):

$$\mu_{(r)} = \frac{k\ldots(k+r-1)(N-M)\ldots(N-M-r+1)}{(M+1)\ldots(M+r)}$$

Mit der Substitution $M \to N-1$, $k \to M$, $N \to n+N-1$ (vgl. Bsp. 7.4.3) folgt daraus für die negative hypergeometrische Verteilung:

$$\mu_{(r)} = \frac{M\ldots(M+r-1)n\ldots(n-r+1)}{N\ldots(N+r-1)}$$

7.24. Die Behauptung folgt aus der Identität in Bsp. 7.4.3.

7.25. Man erhält die Rekursionsformel wie üblich durch Berechnung des Quotienten $\frac{P_{x+1}}{P_x}$.

7.26. Nach Aufgabe 7.23 gilt

$$\mu_{(1)} = \frac{Mn}{N} \qquad \mu_{(2)} = \frac{M(M+1)n(n-1)}{N(N+1)}$$

Daraus folgt

$$\mu = \frac{\mu_{(1)}N}{n},$$

$$\frac{\mu_{(2)}}{\mu_{(1)}} = \frac{(M+1)(n-1)}{N+1} = \frac{\left(\frac{\mu_{(1)}N}{n}+1\right)(n-1)}{N+1}. \qquad (1)$$

Durch Multiplikation der letzten Gleichung mit $(N+1)$ und Auflösen nach N folgt

$$N = n\frac{(n-1)\mu_{(1)} - \mu_{(2)}}{n\mu_{(2)} - (n-1)\mu_{(1)}^2}. \qquad (2)$$

Aus (1), (2) ergeben sich die angegebenen Schätzungen.

7.27. Die Behauptung folgt aus Übung 7.1.3 und der Tatsache, daß die negative hypergeometrische Verteilung ein Spezialfall der Pólya-Verteilung für $s = 1$ ist.

7.28. Die Behauptung folgt durch Kürzen der Fakultäten und Kürzen des Bruches durch N (vgl. Abschnitt 5.5).

7.29. Aus (7.29) folgt nach geeigneter Sortierung der Faktoren:

$$P_x = \binom{M+x-1}{x} \frac{(N-M+n-x-1)!}{(N+n-1)!} \frac{(N-1)!}{(N-M-1)!} \frac{n!}{(n-x)!}$$

$$= \binom{M+x-1}{x} \frac{(N-M)\dots(N-1)(n-x+1)\dots n}{(N-M+n-x)\dots(N+n-1)}$$

Kürzen durch $N+n$ zeigt, daß $f(x)$ gegen

$$\binom{M+x-1}{x} p^M (1-p)^x$$

konvergiert.

7.30. Aus 7.29 folgt

$$\lim P_x = \lim \frac{(M+x-1)!n!(N-1)!(N-M+n-x-1)!}{x!(M-1)!(n-x)!(N-M-1)!(N+n-1)!}$$

$$= \lim \frac{(M+x-1)\dots Mn\dots(n-x+1)(N-1)\dots(N-M)}{x!(N+n-1)\dots(N+n-M-x)}$$

Geeignetes Zusammenfassen der Faktoren im Zähler ergibt

$$\lim \frac{[(M+x-1)n][(M+x-2)(n-1)]\dots[M(n-x+1)]\,(N-1)\dots(N-M)}{x!(N+n-1)\dots(N+n-M-x)}$$

Kürzen durch N liefert dann wegen $\frac{nM}{N} = \lambda$ bzw. $\frac{n}{N} = \frac{\lambda}{M}$:

$$\lim \left\{ \frac{\lambda + \frac{\lambda(x-1)}{M} \left[\lambda + \frac{\lambda(x-2)}{M} - \frac{M+(x-2)}{N}\right] \dots \left[\lambda - \frac{M(x-1)}{N}\right]}{x!\left(1+\frac{\lambda}{M} - \frac{1}{N}\right)\dots\left(1+\frac{\lambda}{M} - \frac{M+x}{N}\right)} \right.$$

$$\left. \cdot \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\dots\left(1-\frac{M}{N}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^x \left[1+\frac{x-1}{M}\right]\left[1+\frac{x-2}{M}\right]\cdot\ldots\cdot 1}{x!\left(1+\frac{\lambda}{M}\right)^{M+x}}$$

$$= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

Letzters gilt wegen

$$\lim_{M\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{M}\right)^{n+x} = \lim_{M\to\infty}\left[\left(1+\frac{\lambda}{M}\right)^M \left(1+\frac{\lambda}{M}\right)^x\right] = e^\lambda$$

Kapitel 8

Übungen

8.1.1.

$$P_1 = 0{,}812 \qquad P_2 = 0{,}142 \qquad P_3 = 0{,}033$$
$$P_4 = 0{,}009 \qquad P_5 = 0{,}002$$

8.1.2. Offenbar folgt aus (8.2):

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{q^{x+1}(-x)}{-(x+1)q^x} = \frac{qx}{x+1}.$$

8.2.2.

$$\mu_1' = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{q^x}{-x\ln(1-q)} = \frac{1}{-\ln(1-q)} \sum_{x=1}^{\infty} q^x$$

$$= \frac{1}{-\ln(1-q)} \frac{q}{1-q} = \frac{Aq}{p}$$

8.2.3. Aus der Definition der Anfangsmomente folgt:

$$\mu_1' = A \sum_{x=1}^{\infty} x^r \frac{q^x}{x}$$

$$\frac{d}{dq}\mu_r' = \left(\frac{d}{dq}A\right)\frac{\mu_r'}{A} + A\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} x^{r-1}q^x$$

$$= -\frac{A^2}{p}\frac{\mu_r'}{A} + A\frac{1}{q}\sum_{x=1}^{\infty} x^{r+1}\frac{q^x}{x}$$

$$= -\frac{A}{p}\mu_r' + \frac{1}{q}\mu_{r+1}'$$

Die Formel (8.11) folgt daraus durch Auflösen nach μ_{r+1}'.

8.3.1. Die theoretischen Häufigkeiten für die Schätzungen (a) – (e) sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt

x	1	2	3	4	$\hat{q}$
(a)	99,6	42,6	24,3	15,6	0,855
(b)	161,4	40,9	13,8	5,2	0,506
(c)	169,4	38,1	11,4	3,9	0,45
(d)	152,0	43,3	16,5	7,0	0,57
(e)	178,7	34,1	8,7	2,5	0,382

Die logarithmische Verteilung ist zur Anpassung an die Daten nicht geeignet.

8.3.2. Für $\hat{q} = \frac{2f_2}{f_1} = 0,385$ ergaben sich die theoretischen Häufigkeiten:

$$P_1 = 79,2 \qquad P_2 = 15,2 \qquad P_3 = 3,9$$
$$P_4 = 1,1 \qquad P_5 = 0,3$$

Die Übereinstimmung mit den vorgegebenen Werten ist offenbar gut.

8.4.1.

$$\mu_1' = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-\alpha)\frac{Aq^x}{x}$$

$$= (1-\alpha)\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{Aq^x}{x}$$

$$= (1-\alpha)\frac{Aq}{p} \quad \text{(vgl. (8.10))}$$

$$\mu_2' = \sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-\alpha)\frac{Aq^x}{x}$$
$$= (1-\alpha)\frac{Aq}{p^2} \quad \text{(vgl. (8.10))}$$
$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$
$$= (1-\alpha)\frac{Aq}{p^2} - (1-\alpha)^2\frac{A^2q^2}{p^2}$$
$$= (1-\alpha)\frac{Aq}{p^2}\left[1-(1-\alpha)Aq\right]$$

8.4.2.

$$\mu_1' = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x)$$
$$= 2\left(\alpha + (1-\alpha)\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2}\right)$$
$$+ \sum_{\substack{x=1\\x\neq 2}}^{\infty} x(1-\alpha)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$= 2\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda}\lambda^2$$
$$+ (1-\alpha)\sum_{\substack{x=1\\x\neq 2}}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Daraus folgt nach (2.9):

$$\mu_1' = 2\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda}\lambda^2$$
$$+ (1-\alpha)\left[\lambda - e^{-\lambda}\lambda^2\right]$$
$$= 2\alpha + (1-\alpha)\lambda$$

8.4.3.

$$\sum_{x=0}^{\infty} P_x = (1-\alpha)\sum_{\substack{x=0\\x\neq c}}^{\infty} f(x) + \alpha + (1-\alpha)f(c)$$
$$= (1-\alpha)\left(1-f(c)\right) + \alpha + f(c) - \alpha f(c)$$
$$= 1$$

Aufgaben

8.1.

$$P_1 = 0{,}612 \quad P_2 = 0{,}202 \quad P_3 = 0{,}089 \quad P_4 = 0{,}044$$

8.2.

$$\mu_2' = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 f(x)$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} Axq^x = Aq\sum_{x=1}^{\infty}\frac{d\,(q^x)}{dq}$$
$$= Aq\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = \frac{Aq}{p^2}$$
$$\mu_3' = \sum_{x=1}^{\infty} Ax^2q^x = \sum_{x=1}^{\infty} q\frac{d}{dq}\left(Axq^x\right)$$
$$= q\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} Axq^x = q\frac{d}{dq}\frac{Aq}{p^2}$$
$$= \frac{Aq}{p^3}(1+q).$$

Die vorletzte Gleichung gilt dabei nach dem ersten Teil der Aufgabe.

8.3. a)

$$\begin{aligned}\mu_2' &= q\left(\frac{A\mu_1'}{p} + \frac{d}{dq}\mu_1'\right)\\ &= q\left(\frac{A^2q}{p^2} + \frac{d}{dq}\frac{Aq}{p}\right)\\ &= q\left(\frac{A^2q}{p^2} + \frac{A - A^2q}{p^2}\right) = \frac{Aq}{p^2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mu_3' &= q\left(\frac{A\mu_2'}{p} + \frac{d}{dq}\mu_2'\right)\\ &= q\left(\frac{A^2q}{p^3} + \frac{A}{p^3}(1 + q - Aq)\right)\\ &= \frac{Aq}{p^3}(1+q)\end{aligned}$$

8.4. Die Behauptung folgt durch vollständige Induktion nach r.

8.5. Aus SL (5.39) und (8.9) ergibt sich

$$\begin{aligned}M(t) &:= M_{x-\frac{Aq}{p}}(t) = e^{-tAq/p}M_x(t)\\ &= -Ae^{-tAq/p}\ln\left(1 - qe^t\right).\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}M'(t) &= Ae^{-tAq/p}\left(\frac{Aq}{p}\ln\left(1 - qe^t\right) + \frac{qe^t}{1 - qe^t}\right)\\ &\Longrightarrow \mu_1 = M'(0) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M''(t) &= -\frac{A^2q}{p}e^{-tAq/p}\left(\frac{Aq}{p}\ln\left(1 - qe^t\right) + \frac{qe^t}{1 - qe^t}\right)\\ &\quad + Ae^{-tAq/p}\left(\frac{Aq}{p}\frac{-qe^t}{1 - qe^t} + \frac{qe^t}{\left(1 - qe^t\right)^2}\right)\\ \Longrightarrow \mu_2 &= M''(0) = -\frac{A^2q}{p}\cdot 0\\ &\quad + A\left(\frac{Aq}{p}\frac{-q}{p} + \frac{q}{p^2}\right)\\ &= \frac{Aq}{p^2}(1 - Aq) \quad \text{(vgl. (8.16))}\end{aligned}$$

Die Berechnung von $M'''(t)$ bzw. μ_3 bleibt dem Leser überlassen (vgl. (8.17)).

8.6.

$$\begin{aligned}\mu_2' &= \sum_{k=1}^{2} Z(2,k)\frac{(k-1)!Aq^k}{p^k}\\ &= \frac{Aq}{p} + \frac{Aq^2}{p^2}\\ &= \frac{Aq}{p^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4' &= \frac{Aq}{p} + 7\frac{Aq^2}{p^2} + 6\frac{2!Aq^3}{p^3} + \frac{3!Aq^4}{p^4}\\ &= \frac{Aq\left(1 + 4q + q^2\right)}{p^4}\end{aligned}$$

8.7.

$$\mu_3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \left(-\frac{Aq}{p}\right)^{3-k} \mu'_k \quad \text{(vgl. (8.13))}$$

$$= \left(-\frac{Aq}{p}\right)^3 \mu'_0 + 3\left(-\frac{Aq}{p}\right)^2 \mu'_1$$

$$+ 3\left(-\frac{Aq}{p}\right) \mu'_2 + \mu'_3$$

$$= \frac{-A^3q^3}{p^3} + 3\frac{A^2q^2}{p^2}\frac{Aq}{p} - 3\frac{Aq}{p}\frac{Aq}{p^2} + \frac{Aq(1+q)}{p^3}$$

$$= \frac{Aq}{p^3}(1+q-3Aq+2A^2q^2) \quad \text{(vgl. (8.17))}$$

Analog berechnet man μ_4.

8.8. Die Formel folgt aus (8.16), (8.17) und SL (5.28), (5.29).

8.9. Wegen $\mu_1 = 0$ folgt aus (8.15):

$$\mu_3 = 2\mu_2\mu_1 + q\frac{d}{dq}\mu_2$$

$$= q\frac{d}{dq}\frac{Aq(1-Aq)}{p^2}$$

$$= \frac{Aq}{p^3}(1+q-3Aq+2A^2q^2)$$

8.10.

$$G_X(t) = \sum_x t^x f(x)$$

$$= \alpha + \sum_{x=1}^{\infty} t^x (1-\alpha)\frac{Aq^x}{x}$$

$$= \alpha + A(1-\alpha)\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(tq)^x}{x}$$

$$= \alpha - A(1-\alpha)\ln(1-qt)$$

8.11. Die Beziehung folgt sofort aus (8.10) und (8.16).

8.12. Aus (8.10) und (8.17) ergibt sich

$$\mu_3 = \frac{\mu'_1}{p^2}(1+q-3\mu'_1 p + 2\mu_1'^2 p^2)$$

8.13. Die Behauptungen folgen sofort aus (8.12).

8.14. Aus $q > q^x$ folgt wegen $\ln(1-q) < 0$:

$$P_1 = \frac{q}{-\ln(1-q)} > \frac{q^x}{-\ln(1-q)} = xP_x$$

8.15. Ableiten von μ_r (vgl. I: (5.11)) nach q ergibt unter Beachtung von

$$\frac{d}{dq}(Aq^x) = Aq^{x-1}\left(x - \frac{Aq}{p}\right),$$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{A}{p}\right) = \frac{A}{p^2}(1-Aq):$$

$$\frac{d}{dq}\mu_r = \sum_{x=1}^{\infty}\left\{r\left(x-\frac{Aq}{p}\right)^{r-1}\left[-\frac{A}{p^2}(1-Aq)\right]A\frac{q^x}{x}\right.$$

$$\left. + \left(x-\frac{Aq}{p}\right)^r \frac{1}{x}Aq^{x-1}\left(x-\frac{Aq}{p}\right)\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dq}\mu_r = -\frac{r\mu_2}{q}\mu_{r-1} + \frac{\mu_{r-1}}{q}$$

Auflösen der letzten Gleichung nach μ_{r+1} ergibt die Rekursionsformel.

8.16. a) Die Beziehung folgt sofort aus (8.11).

b) Nach (8.12) lautet die Behauptung

$$\frac{Aq^r(r-1)!}{p^r} = Aq^r\frac{d^r}{dr}\left(\frac{1}{A}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{(r-1)!}{p^r} = \frac{d^r}{dr}\left(\frac{1}{A}\right),$$

was man durch vollständige Induktion nach r zeigt.

c) Nach (8.12) ist zu zeigen:

$$\frac{Aq^{r+1}r}{p^r} = \left(\frac{Aq}{p} - r\right)\frac{Aq^r(r-1)!}{p^r} + q\frac{d}{dq}\mu_{(r)}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dq}\mu_{(r)} = Aq^{r-1}\frac{(r-1)!}{p^r}\left(r + qr - \frac{Aq}{p}\right),$$

was man wiederum durch Ableiten von $\mu_{(r)}$ zeigt.

d)–f) zeigt man leicht mit Hilfe von (8.10).

8.17. Man vergleiche hierzu Johnson, Kotz (1969: 167).

8.18. Aus der Definition der faktoriellen Momente folgt:

$$\begin{aligned}\mu_{(r)} &= \sum_{x=1}^{\infty} x_{(r)} f(x) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x_{(r)}(1-\alpha)\frac{Aq^x}{x} = (1-\alpha)\mu_{(r)}^{(\log)},\end{aligned}$$

wobei $\mu_{(r)}^{(\log)}$ das r-te faktorielle Moment der logarithmischen Verteilung bezeichnet. Aus (8.12) folgt dann die Behauptung.

8.19.

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= e^0 f(0) + \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} f(x) \\ &= \alpha + (1-\alpha)\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}\frac{Aq^x}{x} \\ &= \alpha + (1-\alpha)A\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(qe^t)^x}{x} \\ &= \alpha - A(1-\alpha)\ln(1-qe^t).\end{aligned}$$

8.20. Für die in $x = 1$ gestutzte inverse hypergeometrische Verteilung gilt

$$P_x = \frac{\binom{k+x-1}{k-1}\binom{N-k-x}{M-k}}{\binom{N}{M} - \binom{N-k}{M-k}} \qquad k = 1, \ldots, N-M$$

(vgl. (5.19c)). Wir zeigen zunächst die Konvergenz

$$\lim_{\substack{M\to\infty \\ (\frac{M}{N}=p)}} Q = \frac{p^k q^x}{1-p^k} \qquad (*)$$

mit

$$Q = \frac{\binom{N-k-x}{M-k}}{\binom{N}{M} - \binom{N-k}{M-k}}.$$

Der Quotient Q läßt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}Q &= \frac{(N-k-x)!}{(M-k)!(N-M-x)!\left[\dfrac{N!}{M!(N-M)!} - \dfrac{(N-k)!}{(M-k)!(N-M)!}\right]} \\ &= \frac{(N-k-x)!M!(N-M)!}{(M-k)!(N-M-x)!\left[N! - \dfrac{M!(N-k)!}{(M-k)!}\right]} \\ &= [(M-k+1)\ldots M]\cdot[(N-M-x+1)\ldots(N-M)] \\ &\quad \cdot \frac{(N-k-x)!}{N! - \dfrac{M!(N-k)!}{(M-k)!}}\end{aligned}$$

Kürzen des Bruchs durch $(N-k-x)!$ ergibt

$$\frac{[(M-k+1)\dots M]\,[(N-M-x+1)\dots(N-M)]}{[(N-k-x+1)\dots N]-[(M-k+1)\dots M(N-k-x+1)\dots(N-k)]}$$

Teilt man alle Faktoren durch N, so wird deutlich, daß dieser Ausdruck gegen

$$\frac{p^k q^x}{1-p^k}$$

konvergiert, d.h. es gibt (*). Multiplikation von (*) mit

$$\binom{k+x-1}{x}$$

zeigt, daß die in $x=1$ gestutzte inverse hypergeometrische Verteilung gegen die in $x=1$ gestutzte negative Binomialverteilung

$$P_x = \frac{\binom{k+x-1}{x} p^k q^x}{1-p^k}$$

konvergiert (für $\frac{M}{N}=p$; M, $N\to\infty$).

8.21.

$$G_X(t) = \sum_x t^x f(x) = A\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(tq)^x}{x}$$

$$= -A\ln(1-tq) = \frac{\ln(1-tq)}{\ln(1-q)}$$

Kapitel 9

Übungen

9.1.1. Als k-te Ableitung der Funktion $G_X(t)$ nach t erhält man

$$G_X^{(k)}(t) = k!pq^k(1-qt)^{-k-1}$$

Daraus folgt

$$P_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = pq^k$$

9.1.2.

$$G_X^{(k)}(t) = \frac{(a+b)!}{(a+b-k)!}P^k(q+pt)^{a+b-k} \Longrightarrow$$

$$P_k = \frac{G_X^{(k)}(t)}{k!} = \binom{a+b}{k}p^k q^{a+b-k}$$

9.1.3. Aus (9.8), (9.9) folgt mit Übung 9.1.1:

$$\overline{H}_X(t) = \frac{1-p(1-qt)^{-1}}{1-t}$$

$$P(X>1) = \overline{H}'_X(0) = \left.\frac{-pq(1-qt)^{-2}(1-t)+\left(1-\frac{p}{1-qt}\right)}{(1-t)^2}\right|_{t=0}$$

$$= -pq+q = q^2$$

9.2.1. Analog zu Beispiel 9.2.1. erhalten wir

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t)\cdot G_Y(t) \\ &= e^{-\lambda_1(1-t)}e^{-\lambda_2(1-t)} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(1-t)} \end{aligned}$$

9.2.2.

$$\begin{aligned} G_{kX}(t) &= G_X^k(t) = \left[p(1-qt)^{-1}\right]^k \\ &= p^k(1-qt)^{-k}. \end{aligned}$$

Die r-te Ableitung von $G_{kX}(t)$ nach t ist:

$$G_{kX}^{(r)}(t) = \frac{(k+r-1)!}{(k-1)!} p^k q^r (1-qt)^{-(k+r)} \Longrightarrow$$

$$P_r = \frac{G_{kX}^{(r)}(0)}{r!} = \binom{k+r-1}{r} p^k q^r.$$

9.3.1.

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f(x) = \sum_x e^{tx} \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-p\lambda} \sum_x \frac{(p\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-p\lambda} e^{p\lambda} e^t = e^{p\lambda\left(e^t-1\right)}$$

9.3.2. Da sich bei der hypergeometrischen Verteilung n und M austauschen lassen, d.h. da

$$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{x}\binom{N-n}{M-x}}{\binom{N}{M}}$$

gilt (vgl. (5.3)), ist die folgende Summe zu berechnen:

$$P_x = \sum_M \frac{\binom{n}{x}\binom{N-n}{M-x}}{\binom{N}{M}} \binom{N}{M} p^M q^{N-M}$$

$$= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \sum_M \binom{N-n}{M-x} p^{M-x} q^{N-n-M+x}$$

$$= \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Man beachte dabei, daß die letzte Summe gleich 1 ist.

9.3.3.

$$P_0 = G_X(0) = \exp\left\{-m\left[1 - \frac{1-e^{-\theta\lambda(1-0)}}{\theta\lambda(1-0)}\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-m\left[1 - \frac{1-e^{-\theta\lambda}}{\theta\lambda}\right]\right\}$$

$$P_1 = G_X'(0) = -\frac{m}{\theta\lambda} \frac{-\theta\lambda(1-t)e^{\theta\lambda(t-1)} + 1 - e^{\theta\lambda(t-1)}}{(1-t)^2}$$

$$\cdot \exp\left\{-m\left[1 - \frac{1-e^{-\theta\lambda}}{\theta\lambda}\right]\right\}\Bigg|_{t=0}$$

$$= -\frac{m}{\theta\lambda}\left(1 - (\theta\lambda+1)e^{\theta\lambda}\right) \cdot P_0$$

9.3.4. a)

$$G_X(t) = \sum_{x=0}^{1} t^x f(x)$$

$$= t^0 f(0) + t f(1)$$

$$= q + tp$$

b)

$$G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-p\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(tp\lambda)^x}{x!} = e^{-p\lambda} e^{tp\lambda} = e^{p\lambda(t-1)}$$

9.4.1. a)

$$f(x) = \frac{1}{1-p^k}\binom{k+x-1}{x}p^k q^x \qquad x = 1, 2, \ldots$$

$$G_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty} t^x \frac{1}{1-p^k}\binom{k+x-1}{x}p^k q^x$$

$$= \frac{p^k}{1-p^k}\sum_{x=1}^{\infty}\binom{k+x-1}{x}(qt)^x$$

$$= \frac{p^k}{1-p^k}\left(\frac{1}{(1-qt)^k} - 1\right) = \frac{1-(1-qt)^k}{1-p^k}\left(\frac{p}{1-qt}\right)^k$$

Die letzte Gleichung ergibt sich dabei aus:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k+x-1}{x}(1-qt)^k(qt)^x = 1$$

(vgl. (4.1)).

b) Als Grenzwert für $k \to 0$ ergibt sich

$$\lim_{k\to 0}\frac{1-(1-qt)^k}{1-p^k}\left(\frac{p}{1-qt}\right)^k$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1-(1-pt)^k}{1-p^k}$$

Unter Verwendung der l'Hospitalschen Regel und der Beziehung

$$\frac{d}{dk}a^k = a^k \ln a$$

ergibt dies:

$$\lim_{k\to 0}\frac{-(1-qt)^k\ln(1-qt)}{-p^k\ln p} = \frac{\ln(1-qt)}{\ln p}$$

9.4.2. a)

$$f(x) = \frac{\binom{n}{x}p^x q^{n-x}}{1-q^n}$$

$$G_X(t) = \sum_{x=1}^{n} t^x \frac{\binom{n}{x}p^x q^{n-x}}{1-q^n}$$

$$= \frac{1}{1-q^n}\sum_{x=1}^{n}\binom{n}{x}(pt)^x q^{n-x}$$

$$= \frac{1}{1-q^n}(pt+q)^n\sum_{x=1}^{n}\binom{n}{x}\left(\frac{pt}{pt+q}\right)^x\left(\frac{q}{pt+q}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{(pt+q)^n}{1-q^n}\left(1-\left(\frac{q}{pt+q}\right)^n\right)$$

$$= \frac{(pt+q)^n - q^n}{1-q^n}$$

b) Unter den gegebenen Bedingungen gilt

$$\lim q^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

$$\lim(pt+q)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda}{n}t + 1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda(t-1)}{n}\right)^n = e^{\lambda(t-1)}$$

Daraus folgt

$$\lim G_X(t) = \frac{e^{\lambda(t-1)} - e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{e^{\lambda t}-1}{e^{\lambda}-1},$$

was die WEF der in $x = 1$ gestutzten Poisson-Verteilung darstellt.

c)

$$P_0 = G_X(0) = 0$$
$$P_1 = G'_X(1) = \frac{1}{e^\lambda - 1} e^{\lambda t}\lambda \Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}$$

9.4.3. Die WEF der negativen Binomialverteilung bestimmt man analog zu Aufgabe 9.4.1 a) als

$$G_X(t) = \left(\frac{p}{1-qt}\right)^k$$

Für $kq = \lambda$, d.h. für

$$q = \frac{\lambda}{k}, \qquad p = \frac{k-\lambda}{k}$$

läßt sich diese WEF wie folgt umformen:

$$G_X(t) = \left(\frac{k-\lambda}{k\left(1 - \frac{\lambda t}{k}\right)}\right)^k = \left(\frac{k-\lambda}{k-\lambda t}\right)^k$$
$$= \left(1 + \frac{\lambda(t-1)}{k-\lambda t}\right)^{k-\lambda t} \left(1 + \frac{\lambda(t-1)}{k-\lambda t}\right)^{\lambda t}.$$

Für $k \to \infty$ konvergiert der erste Faktor gegen $e^{\lambda(t-1)}$ und der zweite gegen 1, d.h. $G_X(t)$ konvergiert gegen die WEF der Poisson-Verteilung.

Aufgaben

9.1. a) Negative Binomialverteilung (vgl. Übung 9.4.3)

b) Logarithmische Verteilung (vgl. Übung 9.4.1b)

c) Die WF ist

$$f(x) = \frac{\theta^x}{e^\theta(1+\theta)} \frac{x+1}{x!}$$

d) Geometrische Verteilung
Die WF ist

$$f(x) = pq^x.$$

Dies ist ein Spezialfall von a) für $k = 1$ (vgl. I (3.6), (4.1)).

9.2.

$$G_X(t) = e^{-m} e^{me^{-\lambda}e^{\lambda t}} \Longrightarrow$$
$$G'_X(t) = G_X(t)\left(me^{-\lambda}e^{\lambda t}\right)'$$
$$= G_X(t) me^{-\lambda} e^{\lambda t}\lambda$$
$$G''_X(t) = me^{-\lambda}\lambda\left[e^{\lambda t}G_X(t)\right]'$$
$$= me^{-\lambda}\lambda\left[\lambda e^{\lambda t}G_X(t) + e^{\lambda t}G'_X(t)\right]$$

Daraus folgt

$$P_0 = G_X(0) = e^{-m}e^{me^{-\lambda}} = e^{m\left(e^{-\lambda}-1\right)}$$
$$P_1 = G'_X(0) = G_X(0) me^{-\lambda}\lambda = \lambda m e^{-\lambda} e^{m\left(e^{-\lambda}-1\right)}$$
$$P_2 = \frac{1}{2}G''_X(0) = \frac{1}{2} me^{-\lambda}\lambda\left[\lambda G_X(0) + G'_X(0)\right]$$
$$= \frac{m}{2}e^{-\lambda}\lambda\left[\lambda e^{m\left(e^{-\lambda}-1\right)} + \lambda m e^{-\lambda} e^{m\left(e^{-\lambda}-1\right)}\right]$$
$$= \frac{m}{2}\lambda^2 e^{-\lambda} e^{m\left(e^{-\lambda}-1\right)}\left[1 + me^{-\lambda}\right]$$

9.3. Die WEF von X und Y sind $p^{k_1}(1-qt)^{-k_1}$, bzw. $p^{k_2}(1-qt)^{-k_2}$.

Folglich ist

$$p^{k_1+k_2}(1-qt)^{-(k_1+k_2)}$$

die WEF von $X+Y$.

9.4. Die WF der Faltung ist

$$f(y) = \sum_{x=0}^{y} A\frac{q^x}{x} A\frac{q^{y-x}}{y-x}$$

$$= A^2 q^y \sum_{y=0}^{y} \frac{1}{x(y-x)}$$

Dies ist offenbar keine logarithmische Verteilung.

9.5. a) Nach (6.1) ist die WEF gegeben durch

$$G_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty} t^x \frac{e^{-m}a^{x-1}}{(x-1)!} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y^{x-1}(me^{-a})^y}{y!}$$

$$= e^{-m} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(me^{-a})^y}{y!} t \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(tay)^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-m} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(me^{-a})^y}{y!} te^{tay}$$

$$= e^{-m} t \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\left(me^{a(t-1)}\right)^y}{y!}$$

$$= te^{-m} e^{me^{a(t-1)}} = te^{m\left(e^{a(t-1)}-1\right)}$$

b) Die WEF der Faltung ist

$$G_Z(t) = te^{m_1\left(e^{\lambda(t-1)}-1\right)} te^{m_2\left(e^{\lambda(t-1)}-1\right)}$$

$$= t^2 e^{(m_1+m_2)\left(e^{\lambda(t-1)}-1\right)}$$

c) Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten P_0, P_1, P_2 aus der WEF ist eine explizite Darstellung der ersten beiden Ableitungen von $G_Z(t)$ nicht nötig. Wir setzen

$$A(t) = (m_1+m_2)\left(e^{\lambda(t-1)}-1\right).$$

Dann gilt

$$G_Z(t) = t^2 e^{A(t)}$$

$$G'_Z(t) = 2te^{A(t)} + t^2 e^{A(t)} A'(t)$$

$$= te^{A(t)}\left[2 + tA'(t)\right]$$

$$G''_Z(t) = \left[e^{A(t)} + te^{A(t)}A'(t)\right]\left[2 + tA'(t)\right]$$

$$+ te^{A(t)}\left[A'(t) + tA''(t)\right]$$

Daraus folgt

$$P_0 = G_Z(0) = 0$$

$$P_1 = G'_Z(0) = 0$$

$$P_2 = \frac{1}{2}G''_Z(0) = \frac{1}{2}\left\{e^{A(0)} \cdot 2 + 0\right\}$$

$$= e^{A(0)} = e^{(m_1+m_2)\left(e^{-\lambda}-1\right)}$$

9.6. Die WEF der Null-Eins-Verteilung

$$P_x = \binom{1}{x} p^{1-x} q \quad x = 1,2$$

ist offensichtlich

$$G_X(t) = p + tq$$

Die WEF der n-maligen Faltung ist also

$$(p+tq)^n.$$

9.7. Die WEF der logarithmischen Verteilung ist

$$G_X(t) = \frac{\ln(1-qt)}{\ln(1-q)}$$

(vgl. Aufg. 9.1b)). Aus (9.5) folgt dann sofort

$$H_X(t) = \frac{\ln(1-qt)}{(1-t)\ln(1-q)}.$$

Ableiten nach t ergibt

$$H'_X(t) = \frac{1}{\ln(1-q)}\left[\frac{q}{(qt-1)(1-t)} + \frac{\ln(1-qt)}{(1-t)^2}\right]$$

$$H''_X(t) = \frac{1}{\ln(1-q)}\left\{\frac{-q\left[q(1-t)-(qt-1)\right]}{\left[(qt-1)(1-t)\right]^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{-q}{1-qt}(1-t)^2 + \ln(1-qt)2(1-t)}{(1-t)^4}\right\}$$

Daraus folgt nach (9.6):

$$P(X \le 2) = \frac{1}{2}H''_X(0) = \frac{-1}{\ln(1-q)}\left(q + \frac{q^2}{2}\right)$$

$$= P_1 + P_2$$

9.8. a) Seien $f(x)$ und $g(x)$ die WF von X bzw. $X+10$. Dann gilt

$$g(x) = P(X+10=x) = P(X=x-10) = f(x-10).$$

Für die WEF von $X+10$ folgt

$$G_{X+10}(t) = \sum_x t^x g(x)$$

$$= \sum_x t^x f(x-10)$$

$$= t^{10}\sum_x t^{x-10} f(x-10)$$

$$= t^{10} G_X(t)$$

b) Sei nun $h(x)$ die WF von $10X$, dann gilt entsprechend a):

$$h(x) = P(10X = x) = P(X = \frac{x}{10} = f\left(\frac{x}{10}\right),$$

$$G_{10X}(t) = \sum_x t^x h(x)$$

$$= \sum_x t^x f\left(\frac{x}{10}\right)$$

$$= \sum_y \left(t^{10}\right)^y f(y) \qquad \left(y = \frac{x}{10}\right)$$

$$= G_X\left(t^{10}\right)$$

9.9. a) Für die Faltung erhält man

$$f(z) = \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} p q^{z-x}$$

$$= p e^{-\lambda} q^z \sum_{x=0}^{z} \frac{(\lambda/q)^x}{x!}$$

b)

$$F(\infty) = \sum_{z=0}^{\infty} f(z)$$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{\substack{x,z=0 \\ x \leq z}}^{\infty} \frac{(\lambda/q)^x}{x!} q^z$$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda/q)^x}{x!} \sum_{z=x}^{\infty} q^z$$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda/q)^x}{x!} q^x \frac{1}{1-q}$$

$$= pe^{-\lambda} \frac{1}{p} e^{\lambda} = 1$$

c) Analog zu b) erhält man:

$$G_Z(t) = pe^{-\lambda} \sum_{\substack{x,z \\ x \leq z}} (tq)^z \sum_{x=0}^{z} \frac{(\lambda/q)^x}{x!}$$

$$= pe^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda/q)^x}{x!} \frac{(qt)^x}{1-qt}$$

$$= pe^{-\lambda} \frac{1}{1-qt} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!}$$

$$= pe^{-\lambda} e^{\lambda t} (1-qt)^{-1}$$

d)

$$G'_Z(t) = pe^{-\lambda} e^{\lambda t} \frac{\lambda - \lambda qt + q}{(1-qt)^2} \Longrightarrow$$

$$\mu_{(1)} = G'_Z(1) = p(\lambda - \lambda q + q) \quad \text{(vgl. (9.1))}.$$

Anhand der zweiten Ableitung von $G_Z(t)$ nach t erhält man

$$\mu_{(2)} = G''_Z(1) = p\left[\lambda^2 p + \lambda q\left(1+p^2\right) + 2q^2 p\right]$$

e) Aus a) folgt

$$P_{z+1} = pe^{-\lambda} q^{z+1} \sum_{x=0}^{z+1} \frac{(\lambda/q)^x}{x!}$$

$$= pe^{-\lambda} q^{z+1} \left(\frac{P_Z e^{\lambda}}{pq^z} + \frac{(\lambda/q)^{z+1}}{(z+1)!} \right)$$

$$= qP_z + pe^{-\lambda} \frac{\lambda^{z+1}}{(z+1)!}$$

f) Aus (9.5) und Teil c) folgt sofort

$$H_Z(t) = \frac{pe^{\lambda}}{e^{\lambda}(1-t)(1-qt)}$$

9.10. a) Die WEF der Binomialverteilung und der logarithmischen Verteilung sind

$$G_Y(t) = (p+tq)^n,$$

$$G_X(t) = \frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}.$$

Für die Verallgemeinerung gilt also

$$G_Z(t) = G_Y(G_X(t))$$

$$= \left(p + q\frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}\right)^n$$

b)

$$P_0 = G_Z(0) = p^n$$

$$G'_Z(t) = n\left(p + q\frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}\right)^{n-1} \frac{q}{\ln(1-\theta)} \frac{-\theta}{1-\theta t} \Longrightarrow$$

$$P_1 = G'_Z(0) = -nq\theta \frac{p^{n-1}}{\ln(1-\theta)}$$

c) Aus der Definition der Momente und (9.1) folgt

$$\mu_1' = \mu_{(1)} = G_Z'(1) = \frac{-nq\theta}{\ln(1-\theta)}$$

$$\mu_2 = \mu_{(2)} + \mu_1' - \mu_1'^2$$
$$= G_Z''(1) + \mu_1'\,(1-\mu_1') \qquad (*)$$

Dabei ermitteln wir $G_Z''(1)$ wie folgt:

$$G_Z''(t) = \frac{-nq\theta}{\ln(1-\theta)}\left\{[G_Z(t)]^{\frac{n-1}{n}}\,(1-\theta t)^{-1}\right\}'$$
$$= \frac{-nq\theta}{\ln(1-\theta)}\left\{\frac{n-1}{n}\,[G_Z(t)]^{-\frac{1}{n}}\,G_Z'(t)(1-\theta t)^{-1}\right.$$
$$\left. + [G_Z(t)]^{\frac{n-1}{n}}\,(1-\theta t)^{-2}\theta\right\}$$

$$G_Z''(1) = \frac{-nq\theta}{\ln(1-\theta)}\left\{\frac{n-1}{n}\,\frac{-nq\theta}{\ln(1-\theta)}\,\frac{1}{1-\theta} + \frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right\}$$
$$= \frac{nq\theta^2}{(1-\theta)\ln(1-\theta)}\left(\frac{q(n-q)}{\ln(1-\theta)} - \frac{1}{1-\theta}\right)$$

Einsetzen in $(*)$ liefert

$$\mu_2 = \frac{nq\theta}{\ln(1-\theta)}\left(\frac{\theta q(n-1)}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} - \frac{\theta}{(1-\theta)^2} - 1 + \frac{nq\theta}{\ln(1-\theta)}\right)$$

9.11. a) Analog Aufgabe 9.10 erhält man für die WEF der Verallgemeinerung (vgl. auch Aufg. 9.1a)):

$$G_Z(t) = p^k\left(1 - q\frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}\right)^{-k}$$

b)

$$P_0 = G_Z(0) = p^k$$

$$G_Z'(t) = kp^k\left(1 - q\frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}\right)^{-k-1}\cdot\frac{q}{\ln(1-\theta)}\,\frac{-\theta}{1-\theta t} \Longrightarrow$$

$$P_1 = G_Z'(0) = kp^k\frac{-q\theta}{\ln(1-\theta)}$$

c) Entsprechend Aufgabe 9.10 c) gilt

$$\mu_1' = \mu_{(1)} = G_Z'(1) = kp^k p^{-k-1}\frac{-q\theta}{(1-\theta)\ln(1-\theta)}$$
$$= \frac{-qk\theta}{p(1-\theta)\ln(1-\theta)}$$
$$\mu_2 = G_Z''(1) + \mu_1'\,(1-\mu_1') \qquad (*)$$

Nach Teil b) gilt ferner

$$G_Z'(t) = \frac{-kq\theta}{p\ln(1-\theta)}\,[G_Z(t)]^{k+1}\,(1-\theta t)^{-1} \Longrightarrow$$

$$G_Z''(t) = \frac{-kq\theta}{p\ln(1-\theta)}\left\{(k+1)\,[G_Z(t)]^k\,G_Z'(t)(1-\theta t)^{-1}\right.$$
$$\left. + [G_Z(t)]^{k+1}\,(1-\theta t)^{-2}\theta\right\} \Longrightarrow$$

$$G_Z''(1) = \frac{-kq\theta}{p\ln(1-\theta)}\left\{(k+1)G_Z'(1)(1-\theta)^{-1} + \frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right\}$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt eine Darstellung von μ_2. Weitere Umformungen des Ausdrucks sind dem Leser zu überlassen.

9.12. a) Für die WEF der Zusammensetzung gilt

$$G_Z(t) = \frac{1}{\ln(1-\theta)}\ln\left(1 - \theta\frac{\ln(1-qt)}{\ln(1-q)}\right)$$

b)

$$P_0 = G_Z(0) = 0$$

$$G'_Z(t) = \frac{1}{\ln(1-\theta)} \frac{\frac{-\theta}{\ln(1-q)} \frac{-q}{1-qt}}{1-\theta\frac{\ln(1-qt)}{\ln(1-q)}} \Longrightarrow$$

$$P_1 = G'_Z(0) = \frac{\theta q}{(\ln(1-\theta))^2}$$

c)

$$\mu'_1 = \mu_{(1)} = G'_Z(1) = \frac{\theta q}{(1-\theta)\ln(1-\theta)(1-q)\ln(1-q)}$$

9.13. Die WEF der Null-Eins-Verteilung und der logarithmischen Verteilung sind

$$G_X(t) = p + qt$$

und

$$G_Y(t) = \frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}$$

Die WEF der Zusammensetzung ist folglich

$$G_Z(t) = G_X(G_Y(t)) = p + q\frac{\ln(1-\theta t)}{\ln(1-\theta)}$$

Offenbar gilt für die x-te Ableitung von $G_Z(t)$ nach t:

$$G_Z^{(x)}(t) = qG_Y^{(x)}(t).$$

Für die Zusammensetzung gilt also (vgl. (9.3))

$$P_x = \frac{G_Z^{(x)}(0)}{x!} = \frac{qG_Y^{(x)}(0)}{x!} = (1-p)\frac{A\theta^x}{x},$$

da $G_Y(t)$ die WEF der logarithmischen Verteilung ist ($x = 1, 2, \ldots$).

Da ferner $P_0 = G_Z(0) = p$ gilt, folgt die Behauptung nach (8.24).

9.14. Die WF der Zusammensetzung ist

$$f(x) = \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \frac{\theta^n}{n\ln(1-\theta)} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Für $x > 0$ kann man den Ausdruck wie folgt umformen

$$f(x) = \frac{p^x}{-xq^x\ln(1-\theta)} \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n-1}{x-1} (q\theta)^n.$$

Mit der Substitution $\tilde{n} + x = n$ folgt daraus

$$f(x) = \frac{(pq\theta)^x}{-xq^x\ln(1-\theta)(1-q\theta)^x} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \binom{\tilde{n}+x-1}{\tilde{n}} (q\theta)^{\tilde{n}} (1-q\theta)^x$$

$$= \frac{1}{-\ln(1-\theta)} \frac{\left(\frac{p\theta}{1-q\theta}\right)^x}{x},$$

da die Summe den Wert 1 hat (vgl. (4.1)). Durch elementare Rechnungen zeigt man, daß sich $f(x)$ nun in der Form

$$f(x) = \frac{(1-\alpha)}{-\ln(1-q')} \frac{q'^x}{x} \quad (x \geq 1)$$

darstellen läßt (α, q' wie in der Aufgabenstellung).

Ferner gilt auch $f(0) = \alpha$, woraus die Behauptung folgt (vgl. (8.24)).

b)

$$F(\infty) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{-\ln(1-q')} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{q'^x}{x}$$

$$= \alpha + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$$

Kapitel 10

Übungen

10.1.1.

$$P_0 = (q' + qp')^m;$$
$$P_1 = mpq'(q' + qp')^{m-1};$$
$$P_2 = \frac{m(m+1)}{2}(pp')^2 \cdot (q' + qp')^{m-2}.$$

10.1.2.

$$\mu_{(r)} = m_{(r)}(pp')^r,$$

wobei m ein Parameter ist.

10.1.3. Laut (10.1) gilt

$$P_x = \binom{m}{x}(p^2)^x(q+qp)^{m-x};$$

nach (10.2)

$$G_x(t) = (1 - p^2 + p^2 t)^m.$$

10.1.4. (a) $\mu_1' = mnpp'$; $\quad \mu_2 = mnpp'(q + npq')$;

(b) $\mu_1' = n^2p^2$; $\quad \mu_2 = n^2p^2q(1+np)$.

10.1.5.

$$P_{x+1} = \frac{\lambda p}{x+1}P_x.$$

10.1.6.

$$\begin{aligned}
\mu_r' &= \sum_{x=0}^{ny}\sum_{y=0}^{\infty} x^r \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\
&= \sum_{x=0}^{ny}\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{r} Z(r,k)x_{(k)}\binom{ny}{x}p^x q^{ny-x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\
&= \sum_{x=0}^{ny}\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{r} Z(r,k)(ny)_{(k)}\binom{ny-k}{x-k}p^x q^{ny-x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\
&= \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{r} Z(r,k)(ny)_{(k)}p^k\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}\underbrace{\sum_{x=k}^{ny}\binom{ny-k}{x-k}p^{x-k}q^{ny-x}}_{=1} \\
&= \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{r} Z(r,k)p^k\sum_{j=1}^{k}S(k,j)(ny)^j\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\
&= \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)p^k\sum_{j=1}^{k}S(k,j)n^j\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y^j e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\
&= \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)p^k\sum_{j=1}^{k}S(k,j)n^j\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)y_{(i)}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\
&= \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)p^k\sum_{j=1}^{k}S(k,j)n^j\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)\lambda^i\underbrace{\sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y-i}}{(y-i)!}}_{=1}.
\end{aligned}$$

10.1.7.

$$\mu_2' = np\left[q + np(1+\lambda)\right];$$
$$\mu_3' = np\left[3np(1+\lambda)(q+np) - p(1+q-n^2p)\right]$$
$$\mu_4' = np\left[q(1-6pq) + npq(1+\lambda)(7-11p) + 6n^2p^2q\left(1+3\lambda+\lambda^2\right) + \right.$$
$$\left. + n^3p^3\left(1+7\lambda+6\lambda^2+\lambda^3\right)\right].$$

10.1.8.

$$\mu'_r = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{n} \frac{x^r e^{-\lambda y}(\lambda y)^x}{x!}\binom{n}{y}p^y q^{n-y}$$
$$= \sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}p^y q^{n-y}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{r} Z(r,k)x_{(k)}\frac{(\lambda y)^x e^{-\lambda y}}{x!}$$
$$= \sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}p^y q^{n-y}\sum_{k=1}^{r} Z(r,k)(\lambda y)^k \underbrace{\sum_{x=k}^{\infty}\frac{(\lambda y)^{x-k}e^{-\lambda y}}{(x-k)!}}_{=1}$$
$$= \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)\lambda^k \sum_{y=0}^{n} y^k\binom{n}{y}p^y q^{n-y}$$
$$= \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)\lambda^k \sum_{y=0}^{n}\sum_{j=1}^{k} Z(k,j)y_{(j)}\binom{n}{y}p^y q^{n-y}$$
$$= \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)\lambda^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j)n_{(j)}p^j \underbrace{\sum_{y=j}^{n}\binom{n-j}{y-j}p^{y-j}q^{n-y}}_{=1}$$
$$= \sum_{k=1}^{r} Z(r,k)\lambda^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j)n_{(j)}p^j .$$

10.1.9.

$$\mu'_1 = \lambda np;$$
$$\mu'_2 = \lambda np + \lambda^2\left[np + n(n-1)p^2\right]$$

10.1.11.

$$\mu'_1 = \frac{pq'}{p'};$$
$$P_0 = \frac{p'}{1-qq'}$$

$$P_0 = p'\,(1-qq')^{-1};$$
$$(1-P_0)\,/P_0 = pq'/p' = \mu'_1$$

10.1.12.

$$G_x(t) = \sum_{y=0}^{\infty} p'q'^y \sum_{x=0}^{ny}\binom{ny}{x}(pt)^x q^{ny-x}$$
$$= \sum_{y=0}^{\infty} p'q'^y (q+pt)^{ny}$$
$$= \sum_{y=0}^{\infty} p'\left[q'(q+pt)^n\right]^y$$
$$= p'\frac{1}{1-q'(q+pt)^n} = p'\left[1-q'(q+pt)^n\right]^{-1}.$$

10.1.13.

$$\mu_{(r)} = \sum_x\sum_y x_{(r)}\binom{ny}{x}p^x q^{ny-x}p'q'^y$$
$$= p^r p' \sum_x\sum_x (ny)_{(r)}\binom{ny-r}{x-r}p^{x-r}q^{ny-x}q'^y$$
$$= p^r p' \sum_y (ny)_{(r)}q'^y \underbrace{\sum_x \binom{ny-r}{x-r}p^{x-r}q^{ny-x}}_{=1}$$
$$= p^r p' \sum_y \sum_{k=1}^{r} S(r,k)(ny)^k q'^y$$
$$= p^r p' \sum_{k=1}^{r} S(r,k)n^k \sum_y \sum_{j=1}^{k} Z(k,j)y_{(j)}q'^y$$

$$= p^r p' \sum_{k=1}^{r} S(r,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) \sum_{y} q'^j y_{(j)} q'^{(y-j)}$$

$$= p^r p' \sum_{k=1}^{r} S(r,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) q'^j j! (1-q')^{-(j+1)}$$

$$= p^r \sum_{k=1}^{r} S(r,k) n^k \sum_{j=1}^{k} Z(k,j) j! \left(\frac{q'}{p'}\right)^j .$$

10.1.14.

$$\mu_2 = \mu_1' \,(\mu_1' + np + q) .$$

10.1.15.

$$P_\mu = q'^4 \left[npp' c^{m-1} + 3\binom{n}{2}(pp')^2 c^{n-2} + 3\binom{n}{3}(pp')^3 c^{n-3} \right.$$
$$\left. + \binom{n}{4}(pp')^4 c^{n-4} \right]$$

wobei $c = q + pp'$ ist.

10.1.17. Man benutze die Resultate aus Beispiel 10.1.12.

10.1.18.

$$F(\infty) = \frac{\ln(1-q\theta)}{\ln(1-\theta)} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{A}{x} \left(\frac{p\theta}{1-q\theta}\right)^x$$
$$= \frac{\ln(1-q\theta)}{\ln(1-\theta)} - A \ln\left(1 - \frac{p\theta}{1-q\theta}\right)$$
$$= \frac{\ln(1-q\theta)}{\ln(1-\theta)} + \frac{\ln(1-q\theta-p\theta) - \ln(1-q\theta)}{\ln(1-\theta)} = 1$$

10.1.19. Man benutze z.B. die faktoriellen Momente.

10.1.22.

$$P_0 = q;$$
$$P_x = pA\theta^x / x, \quad x = 1, 2, \ldots;$$
$$G_x(t) = q - pA \ln(1-\theta t) \quad \text{mit} \quad A = -\frac{1}{\ln(1-\theta)}.$$

10.2.1.

$$P_x = \underbrace{\frac{\lambda^x}{x! q^k}}_{C} \sum_{y=0}^{\infty} y^x \binom{-k}{y} \left(\frac{-Pe^{-\lambda}}{q}\right)^y$$

$$= C \sum_{j=1}^{x} Z(x,j)(-k)_{(j)} \left(\frac{-Pe^{-\lambda}}{q}\right)^j \sum_{y=j}^{\infty} \binom{-k-j}{y-j} \left(\frac{-Pe^{-\lambda}}{q}\right)^{y-j}$$

$\left[\text{Die letzte Summe ist gleich } \left(1 - \frac{Pe^{-\lambda}}{q}\right)^{-k-j}\right]$

$$= \frac{\lambda^x}{x!(Q-Pe^{-\lambda})^k} \sum_{j=1}^{x} Z(x,j)(-k)_{(j)} \left(\frac{-Pe^{-\lambda}}{Q-Pe^{-\lambda}}\right)^j$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!(Q-Pe^{-\lambda})^k} \sum_{j=1}^{x} Z(x,j) k^{(j)} \left(\frac{P}{Q-Pe^{-\lambda}}\right)^j .$$

10.2.2.

$$G(t) = \sum_{y} e^{ay(t-1)} p q^y = p \sum_{y} \left[q e^{a(t-1)}\right]^y = p(1 - q e^{a(t-1)})^{-1}$$

was für $k = 1$, $Q = \frac{1}{p}$, $P = \frac{q}{p}$ mit (10.56) übereinstimmt.

10.2.3.

$$
\begin{aligned}
\mu_{(r)} &= \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=r}^{\infty} x_{(r)} \frac{e^{-\lambda y}(\lambda y)^x}{x!} \cdot \binom{-k}{y}\left(\frac{-P}{Q}\right)^y Q^{-k} \\
&= \sum_{y}\binom{-k}{y}\left(-\frac{Pe^{-\lambda}}{Q}\right)^q Q^{-k}(\lambda y)^r \sum_{x=r}^{\infty}\frac{(\lambda y)^{x-r}}{(x-r)!} \\
&= \frac{\lambda^r}{Q^k}\sum_{y} y^r \binom{-k}{y}\left(-\frac{P}{Q}\right)^y \\
&= \frac{\lambda^r}{Q^k}\sum_{j=1}^{r} Z(r,j)\left(-\frac{P}{Q}\right)^j (-k)_{(j)} \sum_{y=j}^{\infty}\binom{-k-j}{y-j}\left(-\frac{P}{Q}\right)^{y-j} \\
&= [Q-P=1] \\
&= \frac{\lambda^r}{Q^k}\sum_{j=1}^{r} Z(r,j)\left(-\frac{P}{Q}\right)^j (-k)_{(j)}\left(\frac{1}{Q}\right)^{-k-j} \\
&= \lambda^r \sum_{j=1}^{r} Z(r,j)(-k)_j(-P)^j \\
&= \lambda^r \sum_{j=1}^{r} Z(r,j)k^{(j)}P^j .
\end{aligned}
$$

10.2.6.

$$G_x(t) = e^{-\lambda\left[1-p(1-qt)^{-1}\right]} = e^{-\lambda[1-(Q-Pt)^{-1}]}.$$

Vgl. Aufgabe 10.3.4.

10.2.10. Unter Beachtung von $e^{\ln a} = a$ und $e^b = a^{b/\ln a}$ gilt

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda} e^{\lambda\frac{\ln(1-qt)}{\ln(1-q)}} &= e^{-\lambda}(1-qt)^{\frac{\lambda}{\ln(1-q)}} \\
&= (1-q)^{\frac{-\lambda}{\ln(1-q)}}(1-qt)^{\frac{\lambda}{\ln(1-q)}} \\
&= p^k(1-qt)^{-k},
\end{aligned}
$$

wobei man $k = \dfrac{-\lambda}{\ln(1-q)}$ setzt.

10.3.3.

$$
\begin{aligned}
P_0 &= A\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k-1}{0}\frac{(p\theta)^k}{k} = A[-\ln(1-p\theta)] . \\
P_x &= \sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+x-1}{x} p^k q^x \frac{A\theta^q}{k} \\
&= \underbrace{\frac{Aq^x}{x!}}_{c}\sum_{k=1}^{\infty}(k+x-1)_{(x)}\frac{(p\theta)^k}{k} \\
&= C\sum_{j=1}^{x}|S(x,j)|\sum_{k=1}^{\infty}k^j\frac{(p\theta)^k}{k} .
\end{aligned}
$$

Die letzte Summe ergibt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} Z(j,i)k_{(i)}\frac{(p\theta)^k}{k} &= \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(p\theta)^i\frac{d^i}{d(p\theta)^i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(p\theta)^k}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(i-1)!\left(\frac{p\theta}{1-p\theta}\right)^i ,
\end{aligned}
$$

weil

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(p\theta)^k}{k} = [-\ln(1-p\theta)] ,$$

und

$$\frac{d^i\,[-\ln(1-p\theta)]}{d(p\theta)^i} = (i-1)!(1-p\theta)^{-i}$$

gilt. Setzt man ein, so erhält man (10.95).

10.3.4.

$$P_1 = Apq\theta(1-p\theta)^{-1};$$
$$P_2 = \frac{Apq^2\theta(2-p\theta)}{2(1-p\theta)^2}.$$

10.3.5.

$$\begin{aligned} G_x(t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k+x-1}{x}(qt)^x\frac{A(p\theta)^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(1-qt)^{-k}\frac{A(p\theta)^k}{k} \\ &= A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[p\theta(1-qt)^{-1}\right]^k}{k} \\ &= A\left\{-\ln\left[1-p\theta(1-qt)^{-1}\right]\right\}. \end{aligned}$$

10.3.7. Man leite 10.104 schrittweise nach t ab.

10.3.8.

(a) $G_x(t) = p^k\left[1-q(q'+p't)\right]^{-k};$

(b) $P_x = \binom{k+x-1}{x}\left(\frac{p}{1-qp'}\right)^k\left(\frac{qp'}{1-qq'}\right)^x, \quad x = 0,1,\ldots;$

(c) $\mu_1' = kqp'/p; \quad \mu_2 = kqp'(p+qp')/p^2.$

10.4.1. (a) $P_{x+1} = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}\theta P_x;$

(b) $\mu_{(r)} = \theta^r(\theta+1+r)(1+\theta)^{-1}.$

10.4.3.

$$\mu'_{r+1} = q\left[\frac{A\mu'_r}{r}+\frac{\delta\mu'_r}{\delta q}\right].$$

10.4.4.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+a)\theta^x(a+\theta)^{-1}e^{-\theta}}{x!}, \quad x = 0,1,\ldots; \\ a(x) &= \frac{x+a}{x!}; \\ \theta &= \theta; \\ S(\theta) &= f(\theta). \end{aligned}$$

Aufgaben

10.1.

$$\mu_1' = mp^2;$$
$$\mu_2 = m(1+p)p^2q.$$

10.2.

$$P_0 = \left[q'+p'q^n\right]^m;$$
$$P_1 = mnpp'q^{n-1}(q'+p'q^n)^{m-1}.$$

10.3.

$$\begin{aligned} \sum_x P_x &= \sum_{x=0}^{ny}\sum_{y=0}^{m}\binom{ny}{x}p^xq^{ny-x}\binom{m}{y}p'^yq'^{m-y} \\ &= \sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p'^yq'^{m-y}\sum_{x=0}^{ny}\binom{ny}{x}p^xq^{ny-x} \\ &= \sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p'^yq'^{m-y} = 1 \end{aligned}$$

10.4.

$$P_{x+1} = \frac{(m+x)pp'}{(x+1)(q'+qp')}P_x.$$

10.5.

$$
\begin{aligned}
\lim G_x(t) &= \lim\left[q' + p'(q+pt)^n\right]^m \\
&= \lim\left[1 - \frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{m}\left(1 - \frac{\theta}{n} + \frac{\theta}{n}t\right)^n\right]^m \\
&= \lim\left\{1 - \frac{\lambda}{m}\left[1 - \left(1 - \frac{\theta(1-t)}{n}\right)^n\right]\right\}^m \\
&= \lim\left\{1 - \frac{\lambda}{m}\left[1 - e^{-\theta(1-t)}\right]\right\}^m \\
&= e^{-\lambda\left[1-e^{-\theta(1-t)}\right]}
\end{aligned}
$$

10.6. Sei

$$\lambda q^n = c;$$

$$P_0 = e^{-\lambda}e^c;$$

$$P_1 = \frac{p}{q}e^{-\lambda}e^c nc;$$

$$P_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{e^{-\lambda}e^c nc}{2!}\left[n(1+c) - 1\right];$$

$$P_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 \frac{e^{-\lambda}e^c nc}{3!}\left[2 - 3n(1+c) + n^2(1+3c+c^2)\right];$$

$$
\begin{aligned}
P_4 = \left(\frac{p}{q}\right)^4 \frac{e^{-\lambda}e^c nc}{4!}&\left[-6 + 11n(1+c) - 6n^2(1+3c+c^2) + \right.\\
&\left. + n^3(1+7c+6c^2+c^3)\right];
\end{aligned}
$$

P_5 (vgl. Beispiel 16.1.5);

$$
\begin{aligned}
P_6 = \left(\frac{p}{q}\right)^6 \frac{e^{-\lambda}e^c nc}{6!}&\left[-120 + 274n(1+c) - 225n^2(1+3c+c^2) + \right.\\
&+ 85n^3(1+7c+6c^2+c^3) - 15n^4(1+15c+25c^2+10c^3+c^4) + \\
&\left. + n^5(1+31c+90c^2+65c^3+15c^4+c^5)\right];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_7 = \left(\frac{p}{q}\right)^7 \frac{e^{-\lambda}e^c nc}{7!}&\left[720 - 1764n(1+c) + 1624n^2(1+3c+c^2) - \right.\\
&- 735n^3(1+7c+6c^2+c^3) + 175n^4(1+15c+25c^2+10c^3+c^4) - \\
&- 21n^5(1+31c+90c^2+65c^3+15c^4+c^5) + \\
&\left. + n^6(1+63c+301c^2+350c^3+140c^4+21c^5+c^6)\right];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_8 = \left(\frac{p}{q}\right)^7 \frac{e^{-\lambda}e^c nc}{7!}&\left[-5040 + 13068n(1+c) - 13132n^2(1+3c+c^2) + \right.\\
&+ 6769n^3(1+7c+6c^2+c^3) - 1960n^4(1+15c+25c^2+10c^3+c^4) + \\
&+ 322n^5(1+31c+90c^2+65c^3+15c^4+c^5) - \\
&- 28n^6(1+63c+301c^2+350c^3+140c^4+21c^5+c^6) + \\
&\left. + n^7(1+127c+966c^2+1701c^3+1050c^4+266c^5+28c^6+c^7)\right]
\end{aligned}
$$

10.9.

$$\hat{p} = 1 - \left(\frac{\hat{P}_1/\hat{P}_0}{\bar{x}}\right)^{\frac{1}{n-1}};$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{x}}{n\hat{p}}.$$

10.10. $P_5 = 0{,}0706$

10.11.

$$
\begin{aligned}
G_x(t) &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{n} \frac{e^{-\lambda y}(\lambda y)^x}{x!}\binom{n}{y}p^y q^{n-y} t^x \\
&= \sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}p^y q^{n-y} e^{-\lambda y}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda y t)^x}{x!}
\end{aligned}
$$

[Die letzte Summe ist gleich $e^{\lambda y t}$.]

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}\left(pe^{\lambda t}e^{-\lambda}\right)^y q^{n-y} \\
&= \left[q + pe^{-\lambda(1-t)}\right]^n.
\end{aligned}
$$

10.12.

$$F(\infty)=\underbrace{\sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}p^{y}q^{n-y}}_{=1}\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda y}(\lambda y)^{x}}{x!}}_{=1}=1.$$

10.14.

$$\begin{aligned}
\mu_{(r)} &= \sum_{x=r}^{\infty}\sum_{y} x_{(r)}\binom{y+x-1}{x}q'^{x}\binom{n}{y}(pp')^{y}q^{n-y}\\
&= \sum_{x=r}^{\infty}\sum_{y} x_{(r)}\binom{-y}{x}(-q')^{x}\binom{n}{y}(pp')^{y}q^{n-y}\\
&= \sum_{y=1}^{n} q'^{r}y(y+1)\dots(y+r-1)\binom{n}{y}(pp')^{y}q^{n-y}\sum_{x=r}^{\infty}\binom{-y-r}{x-r}(-q')^{x-r}\\
&= \sum_{y=1}^{n} q'^{r}\sum_{j=1}^{r}|S(r,j)|y^{j}\binom{n}{y}(pp')^{y}q^{n-y}(1-q')^{-y-r}\\
&= \left(\frac{q'}{p'}\right)^{r}\sum_{j=1}^{r}|S(r,j)|\sum_{y=1}^{n}y^{j}\binom{n}{y}p^{y}q^{n-y}\\
&= \left(\frac{q'}{p'}\right)^{r}\sum_{j=1}^{r}|S(r,j)|\sum_{y_1}\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)y_{(i)}\binom{n}{y}p^{y}q^{n-y}\\
&= \left(\frac{q'}{p'}\right)^{r}\sum_{j=1}^{r}|S(r,j)|\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)n_{(i)}p^{i}\underbrace{\sum_{y=i}^{n}\binom{n-i}{y-i}p^{y-i}q^{n-y}}_{=1}\\
&= \left(\frac{q'}{p'}\right)^{r}\sum_{j=1}^{r}|S(r,j)|\sum_{i=1}^{j}Z(j,i)n_{(i)}p^{i}.
\end{aligned}$$

10.15.

$$\begin{aligned}
F(\infty) &= \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{ny}\binom{ny}{x}p^{x}q^{ny-x}p'q'^{y}\\
&= \sum_{y=0}^{\infty}p'q'^{y}\sum_{x=0}^{ny}\binom{ny}{x}p^{x}q^{ny-x}\\
&= \sum_{y=0}^{\infty}p'q'^{y}=\frac{p'}{1-q'}=1.
\end{aligned}$$

10.17. $G_x(t)=p'[1-q'(q+pt)]^{-1}$.

10.19.

$$\begin{aligned}
P_x &= \sum_{y\geq\frac{x}{n}}\binom{ny}{x}p^{x}q^{ny-x}\binom{k+y-1}{y}\left(\frac{P}{Q}\right)^{y}Q^{-k}\\
&= \sum_{y\geq\frac{x}{n}}\binom{ny}{x}p^{x}q^{ny-x}\binom{-k}{y}\left(-\frac{P}{Q}\right)^{y}Q^{-k};
\end{aligned}$$

$$G_x(t)=[Q-P(q+pt)^{n}]^{-k}.$$

10.20. (b)

$$\begin{aligned}
P_x &= \sum_{y}\binom{ny}{x}p^{x}q^{ny-x}\binom{-k}{y}\left(-\frac{P}{Q}\right)^{y}Q^{-k}\\
&= \underbrace{\left(\frac{p}{q}\right)^{x}\frac{Q^{-k}}{x!}}_{c}\sum_{y}(ny)_{(x)}q^{ny}\binom{-k}{y}\left(-\frac{P}{Q}\right)^{y}\\
&= c\sum_{y}\sum_{j=1}^{x}S(x,j)(ny)^{j}\binom{-k}{y}\left(-\frac{Pq^{n}}{Q}\right)^{q}\\
&= c\sum_{j=1}^{x}S(x,j)n^{j}\sum_{y}y^{j}\binom{-k}{y}\left(-\frac{Pq^{n}}{Q}\right)^{y}.
\end{aligned}$$

Die letzte Summe hier ergibt

$$\sum_y \sum_{j=1}^{j} Z(j,k) y_{(i)} \binom{-k}{y} \left(-\frac{Pq^n}{Q}\right)^y$$
$$= \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(-k)_{(i)} \left(-\frac{Pq^n}{Q}\right)^i \sum_{y=i}^{\infty} \binom{-k-i}{y-i} \left(-\frac{Pq^n}{Q}\right)^{y-i},$$

so daß gilt:

$$P_x = c \sum_{j=1}^{x} S(x,j) n^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(-k)_{(i)} \left(-\frac{Pq^n}{Q}\right)^i \left(1 - \frac{Pq^n}{Q}\right)^{-k-i}$$
$$= \left(\frac{p}{q}\right)^x \frac{(Q-Pq^n)^{-k}}{x!} \sum_{j=1}^{x} S(x,j) n^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(-k)_{(i)} \left(\frac{-Pq^n}{Q-Pq^n}\right)^i.$$

(c)

$$P_0 = (Q - Pq^n)^{-k};$$
$$P_1 = npPkq^{n-1}(Q - Pq^n)^{-k-1};$$
$$P_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \left[\binom{k}{2} n^2 (Pq^n)^2 (Q - Pq^n)^{-k-2} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{2} kPq^n (Q - Pq^n)^{-k-1}\right].$$

(d)

$$\mu_{(j)} = \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{ny} x_{(j)} \binom{ny}{x} p^x q^{ny-x} \binom{-k}{y} \left(-\frac{P}{Q}\right)^y Q^{-k}$$
$$= Q^{-k} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-k}{y} \left(-\frac{P}{Q}\right)^y (ny)_{(j)} p^j \underbrace{\sum_{x=j}^{ny} \binom{ny-j}{x-j} p^{x-j} q^{ny-j}}_{=1}$$
$$= Q^{-k} p^j \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} S(j,i)(ny)^i \binom{-k}{y} \left(-\frac{P}{Q}\right)^y$$

$$= Q^{-k} p^j \sum_{i=1}^{j} S(j,i) n^i \sum_{y=s}^{\infty} \sum_{s=1}^{i} Z(i,s) y_{(s)} \binom{-k}{y} \left(-\frac{P}{Q}\right)^y$$
$$= Q^{-k} p^j \sum_{i=1}^{j} S(j,i) n^i \sum_{s=1}^{i} Z(i,s)(-k)_{(s)} \left(-\frac{P}{Q}\right)^s \cdot$$
$$\cdot \sum_{y \geq s} \binom{-k-s}{y-s} \left(-\frac{P}{Q}\right)^{y-s}$$

Die letzte Summe ergibt

$$\left(1 - \frac{P}{Q}\right)^{-k-s} = (Q-P)^{-k-s} Q^{k+s} = Q^{k+s},$$

da $Q - P = 1$ gilt. Daher ist

$$\mu_{(j)} = p^j \sum_{i=1}^{j} S(j,i) n^i \sum_{s=1}^{i} Z(i,s)(-k)_{(s)} (-P)^s, \quad \text{woraus}$$
$$\mu'_r = \sum_{j=1}^{r} Z(r,j) \mu_{(j)}.$$

10.21. $\mu'_1 = npkP$;

10.23. $P_x = e^{-\lambda p} (\lambda p)^{x-1} / (x-1)!, \quad x = 1, 2, \ldots$.

10.24. Null-Eins-V. $(p) \bigvee$ Poisson-V. (λ).

10.25. (a)

$$G_x(t) = q + pe^{-\lambda(1-t)};$$
$$P_0 = q + pe^{-\lambda};$$
$$P_x = pe^{-\lambda} \lambda^x / x!, \quad x = 1, 2, \ldots,$$

(b)

$$f(\infty) = q + pe^{-\lambda} + p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = q + pe^{-\lambda} + p\left[e^{-\lambda} e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right] = 1.$$

10.26. (a)

$$G_x(t) = q + pp'(1 - q't)^{-1};$$

(b)

$$P_0 = q + pp';$$
$$P_x = pp'q'^x, \quad x = 1, 2, \ldots$$

(g)

$$M_x(t) = q + pp'(1 - q'e^t)^{-1};$$
$$\mu_1' = \frac{pq'}{p'};$$
$$\mu_2' = \mu_1' + 2\mu_1' c;$$
$$\mu_3' = \mu_1' + 6\mu_1' c + 6\mu_1' c^2;$$
$$\mu_4' = \mu_1'(1 + 14c + 36c^2 + 24c^3) \quad \text{wobei} \quad c = q'/p'.$$

(h)

$$M_{x-\mu_1'}(t) = e^{-t\mu_1'}\left[q + pp'(1 - q'e^t)^{-1}\right];$$
$$\mu_2 = \mu_1'[1 + c(1+q)].$$

(i)

$$\hat{p} = 2\bar{x}^2/(S^2 + \bar{x}^2 - \bar{x});$$
$$\hat{p}' = 2\bar{x}/(S^2 + \bar{x}^2 + \bar{x}).$$

10.27. (a)

$$G_x(t) = p'(q + pt)[1 - q'(q + pt)]^{-1} = (p'q + p'pt)(1 - q'q - q'pt)^{-1}.$$

(b)

$$P_0 = p'q/(1 - q'q);$$
$$P_x = \frac{p'p}{(1 - q'q)^2}\left(\frac{pq'}{1 - qq'}\right)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

(d)

$$P_x = \frac{p'}{1 - q'q}\left(\frac{pq'}{1 - qq'}\right)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

10.28. (a) Null-Eins-V. $(p) \bigvee$ Binomialv. (n, p')

(b) Modifizierte Binomialverteilung

$$P_0 = q + pq'^n;$$
$$P_x = p\binom{n}{x}p'^x q'^{n-x}, \quad x = 1, 2, \ldots, n.$$

10.29.

$$G_x(t) = q + p(q + pt);$$
$$P_0 = q(1 + p)q;$$
$$P_1 = p^2.$$

10.30. Poisson-V. $(\lambda) \bigwedge_{\lambda}$ Poisson-V. (m);

$$P_x = \frac{e^{-m}e^{m/e}}{x!}\sum_{j=1}^{x} Z(x, j)\left(\frac{m}{e}\right)^j;$$
$$G_x(t) = e^{-m\left(1 - e^{t-1}\right)}.$$

10.32.

$$\lim G_x(t) = \lim e^{-\lambda\left[1 - (Q - Pt)^{-k}\right]}$$
$$= \lim e^{-\lambda\left[1 - (1 + P - Pt)^{-k}\right]}$$
$$= \lim e^{-\lambda\left[1 + \left(\frac{m}{k} - \frac{mt}{k}\right)^{-k}\right]}$$
$$= e^{-\lambda\left[1 - e^{m(t-1)}\right]}.$$

10.34. (a)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} p^q q^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{x!} = \frac{e^{-\lambda}q^x}{x!} \sum_{k=1}^{\infty} (k+x-1)_{(x)} \frac{(p\lambda)^k}{k!}$$

$$= c \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| k^j \frac{(p\lambda)^k}{k!} = c \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum_{i=1}^{j} Z(j,i) k_{(i)} \frac{(p\lambda)^k}{k!}$$

$$= c \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(p\lambda)^i \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(p\lambda)^{k-i}}{(k-i)!}.$$

Die letzte Summe ergibt $e^{p\lambda}$, so daß gilt:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda q} q^x}{x!} \sum_{j=1}^{x} |S(x,j)| \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)(p\lambda)^i.$$

(c)

$$P_0 = e^{-\lambda q}; \quad P_1 = e^{-\lambda q} p q^{\lambda}; \quad P_2 = \frac{e^{-\lambda q} p q^2 \lambda (2 + p\lambda)}{2!}.$$

(d)

$$\mu_1' = \frac{\lambda q}{p}; \quad \mu_2 = \frac{\lambda q (1+q)}{p^2}.$$

(e)

$$G_x(t) = e^{-\lambda\left[1 - p(1-qt)^{-1}\right]}.$$

10.35.

$$\lim_{q \to 0} e^{-\lambda\left[1 - pt(1-qt)^{-1}\right]} = \lim_{q \to 0} e^{-\lambda\left[1-(1-q)t(1-qt)^{-1}\right]} = e^{-\lambda(1-t)}.$$

10.36. (a)

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \binom{k+\lambda-1}{\lambda} p^k q^{\lambda}$$

$$= \frac{p^k}{x!} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{k+\lambda-1}{\lambda} \lambda^x \left(q e^{-1}\right)^{\lambda}$$

$$= \left[\text{ sei } \quad p^k/x! = c \quad \text{und} \quad q e^{-1} = b\right]$$

$$= c \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{k+\lambda-1}{\lambda} \sum_{i=1}^{x} Z(x,i)\lambda_{(i)} b^{\lambda}$$

$$= c \sum_{i=1}^{x} Z(x,i) b^i \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{k+\lambda-1}{\lambda} \frac{d^i\left(b^{\lambda}\right)}{db^i}.$$

Die letzte Summe ist

$$\frac{d^i}{db^i} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{k+\lambda-1}{\lambda} b^{\lambda} = \frac{d^i (1-b)^{-k}}{db^i}$$

$$= k^{(i)}(1-b)^{-k-i}.$$

Setzt man wieder ein, so erhält man

$$\frac{p^k}{x!(1-b)^k} \sum_{i=1}^{x} Z(x,i) k^{(i)} \left(\frac{b}{1-b}\right)^i$$

$$= \frac{1}{x!} \left(\frac{pe}{e-q}\right)^k \sum_{i=1}^{x} Z(x,i) k^{(i)} \left(\frac{q}{e-q}\right)^i.$$

(c)

$$P_0 = \left(\frac{pe}{e-q}\right)^k;$$

$$P_1 = kq\left(\frac{pe}{e-q}\right)^k;$$

(d)

$$\mu_1' = \frac{kq}{p};$$
$$\mu_2 = \frac{kq(1+p)}{p^2};$$

(e)

$$\mu_{(r)} = \sum_{i=1}^{r} Z((r,i)k^{(i)} \left(\frac{q}{p}\right)^i.$$

10.37.

$$\mu_r' = \sum_{j=1}^{r} Z(r,j)\theta^j (\theta+1+j)(1+\theta)^{-1}.$$

10.38.

$$\mu_{r+1} = \theta\left\{r\mu_{r-1}\left[1+\frac{a}{(a+\theta)^2}\right]+\frac{d\mu_r}{d\theta}\right\}.$$

10.39.

$$P_{x+1} = \frac{(a+x+1)}{(a+x)(x+1)}\theta P_x.$$

10.41. (c)

$$\mu_{r+1}' = \theta\left(\frac{2+\theta}{1+\theta}\mu_r' + \frac{d\mu_r'}{d\theta}\right);$$

(d)

$$\mu_{r+1}' = \theta\left(\frac{2+\theta}{a+\theta}\mu_r' + \frac{d\mu_r'}{d\theta}\right).$$

10.42.

$$M_x(t) = \left(a+\theta e^t\right)e^{\theta e^t}/(a+\theta)e^\theta; \quad G_x(t) = (a+\theta t)e^{\theta t}/(a+\theta)e^\theta.$$

10.44.

$$P_0 = 1 - e^{-\lambda},$$

daher

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!\left(1-e^{-\lambda}\right)}, \quad x = 1,2,\ldots;$$
$$a(x) = \frac{1}{x!};$$
$$\theta = \lambda;$$
$$S(\lambda) = e^\lambda\left(1-e^{-\lambda}\right) = e^\lambda - 1;$$

Die Entwicklung von $S(\lambda)$ in eine Potenzreihe ergibt

$$\lambda + \lambda^2/2! + \lambda^3/3! \ldots.$$

10.45.

$$\left(e^\theta - 1\right)^2 = e^{2\theta} - 2e^\theta + 1 = 1 + 2\theta + \frac{(2\theta)^2}{2!} + \frac{(2\theta)^3}{3!} + \ldots -$$
$$- 2\left[1+\theta+\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^3}{3!}+\ldots\right]+1$$
$$= \sum_{x=2}^{\infty}\frac{\left(2^x-2\right)\theta^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty}\frac{2Z(x,2)\theta^x}{x!}.$$

Division der einzelnen Glieder durch $S(\theta)$ ergibt $f(x)$.

10.46. (a)

$$G_x(t) = \left[\left(e^{\theta t}-1\right)/\left(e^\theta-1\right)\right]^2;$$

(b)

$$\mu_1' = 2\theta e^\theta/\left(e^\theta-1\right);$$
$$\mu_2 = 2\theta e^\theta\left(e^\theta-\theta-1\right)/\left(e^\theta-1\right)^2.$$

10.47. Ja, $n = 1$.

10.48. Die WEF der 0-gestutzten Poisson-Verteilung ist

$$G_x(t) = \frac{e^{-\lambda}e^{\lambda t}-1}{1-e^{-\lambda}} = \frac{e^{\lambda t}-1}{e^\lambda-1},$$

daher ist

$$G_z(t) = G_x(t)G_y(t) = \left(\frac{e^{\lambda t}-1}{e^{\lambda}-1}\right)^2,$$

was der WEF einer Stirling-Verteilung zweiter Art mit $n = 2$ entspricht.

10.49. Es ist

$$G_x(t) = e^{\lambda\left[p^k(1-qt)^{-k}-1\right]}.$$

Wegen $\lim e^A = e^{\lim A}$ genügt es, den Exponenten der WEF zu untersuchen. Betrachtet man λ und p als Funktionen von x, so ist

$$\lim A = \lim \lambda \left[p^k(1-qt)^{-k} - 1\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left\{\left[\frac{p(x)}{1-[1-p(x)]\,t}\right]^k - 1\right\} \Big/ \frac{1}{\lambda(x)}.$$

Wendet man die Regel von l'Hospital an, so erhält man nach Ableitung des Zählers und des Nenners (nach x):

$$\lim A = \lim k\left[\frac{p(x)}{1-[1-p(x)]\,t}\right]^{k-1} \cdot \frac{p'(x)(1-t)}{\{1-[1-p(x)]\,t\}^2} \Big/ -\frac{\lambda'(x)}{\lambda^2(x)}.$$

Der Grenzwert des Ausdrucks mit dem Exponenten $k-1$ ist wegen $p(x) \to 1$ gleich 1, daher kann man schreiben:

$$\lim A = k(1-t)\lim \frac{p'(x)}{\{1-[1-p(x)]\,t\}^2} \Big/ -\frac{\lambda'(x)}{\lambda^2(x)}$$

$$= \frac{k(1-t)}{t}\lim \frac{p'(x)t}{\{1-[1-p(x)]\,t\}^2} \Big/ \frac{-\lambda'(x)}{\lambda^2(x)}$$

Der Ausdruck hinter "lim" entspricht jedoch

$$\left(\frac{-1}{1-[1-p(x)]\,t}+1\right)' \Big/ \left(\frac{1}{\lambda(x)}\right)'$$

$$= \left[\frac{-[1-p(x)]\,t}{1-[1-p(x)]\,t}\right]' \Big/ \left[\frac{1}{\lambda(x)}\right]'.$$

Nach der Regel von l'Hospital kann man nun die Ableitung durch die Funktion ersetzen, so daß gilt:

$$\lim A = \frac{k(1-t)}{t}\lim \frac{-[1-p(x)]\,t}{1-[1-p(x)]\,t} \Big/ \frac{1}{\lambda(x)}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\lambda(x)$ und kürzt durch t, so erhält man

$$\lim A = k(1-t)\lim \frac{-[1-p(x)]\,\lambda(x)}{1-[1-p(x)]\,t} \Big/ \frac{\lambda(x)}{\lambda(x)}$$

$$= [\text{ wegen } \quad 1-p = q; \quad q\lambda \to m]$$

$$= mk(1-t), \quad \text{so daß} \quad \lim \text{ WEF } = e^{-mk(1-t)}.$$

10.50

$$G_x(t)e^{\lambda\left[p^k(1-qt)^{-k}-1\right]} = e^A;$$

$$\lim A = \lim \left[\left(\frac{p}{1-[1-p]t}\right)^{k(x)} - 1\right] \Big/ \frac{1}{\lambda(x)} = [\text{ l'Hospital }]$$

$$= \lim \left(\frac{p}{1-qt}\right)^{k(x)} k'(x)\ln\left(\frac{p}{1-qt}\right) \Big/ -\frac{\lambda'(x)}{\lambda^2(x)} =$$

[die erste Klammer ergibt 1]

$$= \lim \ln\left(\frac{p}{1-qt}\right)[k(x)]' \Big/ \left[\frac{1}{\lambda(x)}\right]' = [\text{ wegen l'Hospital }]$$

$$= \ln\left(\frac{p}{1-qt}\right)\lim k(x)\lambda(x) = m\ln\left(\frac{p}{1-qt}\right).$$

Daher folgt

$$e^{m\ln[p/(1-qt)]} = p^m(1-qt)^{-m}.$$

10.52. (a)

$$p^r\sum_{j=1}^{r} S(r,j)n^j \sum_{i=1}^{j} Z(j,i)m_{(i)}p'^i$$

(b) $(p\lambda)^r$

(c) $\frac{A}{1-q}\sum_{j=1}^{r-1} Z(r-1,j)j!\left(\frac{q}{1-q}\right)^j$ für $r = 2, 3, \ldots$

Kapitel 11

Übungen

11.2.1. Wegen

$$n^{(x)} = (n+x-1)!/(n-1)! = x!\binom{n+x-1}{x}$$

und

$$(b+n)^{(x+1)} = (b+n+x)!/(b+n-1)! = (x+1)!\binom{b+n+x}{x+1},$$

ergibt sich das Resultat sofort durch Einsetzung.

11.2.2. Aus (11.13) folgt

$$\mu_{(r)} = \frac{(n+r-1)!r!(b-r-1)!}{(n-1)!(b-1)!} = \frac{r!(n+r-1)_{(r)}}{(b-1)_{(r)}} = \frac{r!n^{(r)}}{(b-1)_{(r)}}.$$

11.2.3. Mit

$$\hat{b} \approx 1{,}96; \quad \hat{n} \approx 0{,}66;$$

x_i	1	2	3	4	5	6	≥ 7
NP_i	332,90	60,69	21,81	10,32	5,71	3,49	10,08

Die Anpassung ist gut ($\chi^2 = 6{,}35$).

11.3.2.

$$P_1 = 2/3; \quad P_2 = 2/12; \quad P_3 = 4/60; \quad P_4 = 12/360.$$

11.3.3.

$$\begin{array}{lll}
\hat{b} = 0{,}796418; & NP_1 = 845{,}00; & NP_2 = 302{,}17; \\
NP_3 = 159{,}19; & NP_4 = 99{,}57; & NP_5 = 68{,}71; \\
NP_6 = 50{,}55; & NP_7 = 38{,}90; & NP_8 = 30{,}90; \\
NP_9 = 25{,}28; & NP_{10} = 21{,}07; & NP_{11} = 17{,}86; \\
NP_{12} = 15{,}36; & NP_{13} = 13{,}36; & NP_{14} = 11{,}74; \\
NP_{15} = 10{,}40; & NP_{16} = 9{,}29; & NP_{17} = 8{,}35; \\
NP_{18} = 7{,}55; & NP_{19} = 6{,}87; & NP_{20} = 6{,}27; \\
NP_{\geq 21} = 157{,}56. & &
\end{array}$$

Aufgaben

11.1.

$$V = 369; \quad L = 1661; \quad V_1 = 159; \quad \hat{b} = 1{,}61; \quad \hat{n} = 2{,}12;$$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NP_i	159,27	71,39	38,87	23,80	15,97	11,32	8,37	6,40	5,02

x_i	10	11	12	13	14	≥ 15
NP_i	4,02	3,28	2,72	2,28	1,94	14,35

11.2.

$$P_{x+1} = \frac{n+x-1}{b+n+x} P_x$$

11.3.

$$\mu_{(r)} = \sum x(x-1)\dots(x-r+1)\frac{\binom{-1}{x-1}\binom{b}{-n-x+1}}{\binom{b-1}{-n}}$$

$$= \sum [(x-r)+r]\,(x-1)\dots(x-r+1)f(x)$$

$$= \sum r(x-1)\dots(x-r+1)f(x)+$$

$$+ \sum (x-1)(x-2)\dots(x-r+1)(x-1)f(x)$$

$$= \frac{r(-1)_{(r-1)}(-n)_{(r-1)}}{(b-1)_{(r-1)}} + \frac{(-1)_{(r)}(-n)(r)}{(b-1)_{(r)}}$$

$$= \frac{r1^{(r-1)}n^{(r-1)}}{(b-1)\dots(b-r+1)} + \frac{1^{(r)}n^{(r)}}{(b-1)\dots(b-r)}$$

$$= \frac{r(r-1)!n(n+1)\dots(n+r-2)(b-r) + r!n(n+1)\dots(n+r-1)}{(b-1)\dots(b-r)}$$

$$= \frac{r!(b+n-1)\Gamma(n+r-1)}{\Gamma(n)(b-1)\dots(b-r)} \quad \text{für} \quad b > r.$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\mu_{(r)} = \frac{r!(n+r-2)!(b+n-1)}{(n-1)!(b-1)\dots(b-r)}.$$

11.5.

	Waring	Yule	
	$\hat{b} = 2{,}0869$	(a)	(b)
x_i	$\hat{n} = 0{,}9891$	$\hat{b} = 2.11$	$\hat{b} = 1{,}91$
1	211,00	211,00	204,13
2	51,17	51,34	52,21
3	20,04	20,09	21,27
4	9,85	9,87	10,79
5	5,55	5,55	6,25
6	3,43	3,42	3,95
7	2,26	2,25	2,66
8	1,57	1,56	1,88
9	1,13	1,12	1,38
10	0,84	0,84	1,04
11	0,64	0,64	0,81
≥ 12	3,52	3,32	4,63

11.6. (a) Nach (17.2) ist

$$f(x) = \frac{(-a)!b!(-n)!(b-a+n)!}{x!(-a-x)!(-n-x)!(b+n+x)!(b-a)!}$$

$$= \frac{(-n)!}{x!(-n-x)!}\,\frac{(-a)!}{(-a-x)!}\,\frac{(b-a+n)!}{(b-a)!}\,\frac{b!}{(b+n+x)!}$$

$= [$ vgl. (17.4) $]$

$$= \frac{\binom{-n}{x}(-1)^x a^{(x)}(b-a+n)(b-a+n-1)\dots(b-a+1)}{(b+n+x)(b+n+x-1)\dots(b+1)}$$

$$= \binom{n+x-1}{x}\frac{a(a+1)\dots(a+x-1)(b-a+n)(b-a+n-1)\dots(b-a+1)}{(b+n+x)(b+n+x-1)\dots(b+1)}.$$

Bildet man den Grenzwert für $a \to \infty$, $b \to \infty$, $(b-a)/b \to p$, woraus $a/b \to q$ folgt, und dividiert Zähler und Nenner klammerweise durch b, so folgt

$$\lim f(x) = \binom{n+x-1}{x} q^x p^n.$$

(b) Wir erhalten wieder

$$f(x) = \binom{-a}{x} \frac{b!(-n)!(b-a+n)!}{(-n-x)!(b+n+x)!(b-a)!}$$

$$= \binom{-a}{x} \frac{(-n)!}{(-n-x)!} \frac{b!}{(b-a)!} \cdot \frac{(b-a+n)!}{(b+n+x)!}$$

$$= \binom{a+x-1}{x} \frac{n(n+1)\dots(n+x-1)b(b-1)\dots(b-a+1)}{(b+n+x)(b+n+x-1)\dots(b+n-a+1)}.$$

Für $b \to \infty$, $n \to \infty$, $b/(b+n) \to p$, d.h. $n/(b+n) \to q$ folgt

$$\lim f(x) = \binom{a+x-1}{x} q^x p^a,$$

wobei Zähler und Nenner klammerweise durch $(b+n)$ dividiert werden.

11.7.

x_i	$L = 500$ $\hat{b} = 1,58$ $\hat{n} = 0,37$	$L = 1000$ $\hat{b} = 1,65$ $\hat{n} = 0,59$	$L = 2000$ $\hat{b} = 1,43$ $\hat{n} = 0,68$	$L = 3000$ $\hat{b} = 1,37$ $\hat{n} = 0,66$	$L = 4000$ $\hat{b} = 1,39$ $\hat{n} = 0,77$	$L = 5000$ $\hat{b} = 1,32$ $\hat{n} = 0,75$
1	247,94	386,72	521,85	729,54	862,96	956,52
2	31,10	70,42	114.10	158,91	210,28	233,68
3	10,79	26,41	46,64	65,46	89,47	100,48
4	5,16	13,05	24.46	34,62	48,03	54,50
5	2,92	7,51	14,73	21,01	29,39	33,67
6	1,84	4,76	9,70	13,93	19,58	22,62
7	1,24	3,23	6,79	9,82	13,85	16,12
8	0,88	2,30	4,98	7,24	10,23	11,99
9	0,65	1,71	3,78	5,53	7,83	9,23
10	0,50	1,30	2,96	4,34	6,15	7,30
≥ 11	2,97	7,58	20,01	30,61	43,23	53,90

Literatur

Bennett, P.E. (1969). "The statistical measurement of a stylistic trait in *Julius Caesar* and *As you like it*." In: Dolezel, L., Bailey, R.W. (eds.). *Statistics and style*. New York: Elsevier. 29-41.

Brainerd, B. (1974). *Weighing evidence in language and literature: A statistical approach*. Toronto: The University of Toronto Press.

Denes, P.B. (1964). "On the statistics of spoken English." *Zeitschrift für Phonetik, Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung 17*, 51-72.

Douglas, J.B. (1980). *Analysis with standard contagious distributions*. Fairland, Maryland USA: International Co-operative Publishing House.

Eggenberger, F., Pólya, G. (1923). "Über die Statistik verketteter Vorgänge." *Zeitschrift für Angewandte Mathematik 3*, 279-289.

Feller, W. (1943). "On a general class of 'contagious' distributions." *Annals of Mathematical Statistics 14*, 389-400.

Feller, W. (1962). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. I. New York: Wiley.

Fisher, R.A., Corbet, A.S., Williams, C.B. (1943). "The relation between the number of species and the number of individuals in a random sample of an animal population." *Journal of Animal Ecology 12*, 42-58.

Fisz, M. (1970). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Grotjahn, R. (1979). *Linguistische und statistische Methoden in Metrik und Textwissenschaft*. Bochum: Brockmeyer.

Gurland, J. (1965). "A method of estimation for some generalized Poisson distributions." In: Patil, G.P. (ed.). *Classical and contagious discrete distributions*. Oxford: Pergamon. 141-158.

Haight, F.A. (1966). "Some statistical problems in connection with word association data." *Journal of Mathematical Psychology 3*, 217-233.

Herdan, G. (1964). *Quantitative linguistics*. London: Butterworths.

Horvath, W.J. (1963). "A stochastic model for word association tests." *Psychological Review 70*, 361-364.

Irwin, J.O. (1965). "A unified derivation of some well-known frequency distributions." *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A 118, 394-404.

Johnson, N.L., Kotz, S. (1969). *Discrete distributions*. Boston: Houghton Mifflin.

Kapur, J.N., Saxena, H.C. (1970). *Mathematical statistics*. Delhi: Chand.

Katti, S.K., Gurland, J. (1961). "The Poisson Pascal distribution." *Biometrics 17*, 527-538.

Katti, S.K., Gurland, J. (1962). "Some methods of estimation for the Poisson binomial distribution." *Biometrics 18*, 42-51.

Kemp, C.D., Kemp, A.W. (1956). "Generalized hypergeometric distributions." *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 18, 202-211.

Kemp, C.D., Kemp, A.W. (1965). "Some properties of the 'Hermite' distribution." *Biometrika 52*, 381-394.

Kendall, D.G. (1948). "On some modes of population growth leading to R.A. Fisher's logarithmic series distribution." *Biometrika 35*, 6-15.

Kendall, M.G. (1961). "Natural law in the social sciences." *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A 124, 1-19.

Kendall, M.G., Stuart, A. (1969). *The advanced theory of statistics*. Vol. I. London: Griffin.

Martin, R. (1974). "Syntaxe de la définition lexicographique: Étude quantitative des définissants dans le "Dictionnaire fondamental de la langue française"." In: David, J., Martin, R. (Hrsg.). *Statistique et linguistique*. Paris: Klincksieck. 61-71.

McGuire, J.U., Brindley, T.A., Bancroft, T.A. (1947). "The distribution of the European corn-borer larvae, Pyrausta Nubilalis (hbn), in field corn." *Biometrics 13*, 65-78.

Moran, P.A.P. (1968). *An introduction to probability theory*. Oxford: Clarendon.

Muller, Ch. (1969). "Lexical distribution reconsidered: the Waring-Herdan formula." In: Dolezel, L., Bailey, R.W. (eds.). *Statistics and style*. New York: Elsevier. 45-56.

Nelson, W.C., David, H.A. (1967). "The logarithmic distribution: A review." *The Virginia Journal of Science 18*, 95-102.

Neyman, J. (1939). "On a new class of 'contagious' distributions, applicable in entomology and bacteriology." *Annals of Mathematical Statistics 10*, 35-37.

Noack, A. (1950). "A class of random variables with discrete distributions." *Annals of Mathematical Statistics 21*, 127-132.

Patil, G.P. (1962). "Some methods of estimation for the logarithmic distribution." *Biometrics 18*, 68-75.

Patil, G.P., Joshi, S.W. (1968). *A dictionary and bibliography of discrete distributions*. Edinburgh-London: Oliver & Boyd.

Patil, G.P., Kamat, A.R., Wani, J.K. (1964). *Certain studies on the structure of the logarithmic series distribution and related tables*. Aerospace Res. Lab., Wright- Patterson Air Force Base, Tech. Rep.

Patil, G.P., Wani, J.K. (1965). "On certain structural properties of the logarithmic distribution and the first type Stirling distribution." *Sankhya A, 27*, 271-280.

Quenouille, M.H. (1949). "A relation between the logarithmic, Poisson and negative binomial series." *Biometrics 5*, 162-164.

Rényi, A. (1966). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Sarkadi, K. (1957). "Generalized hypergeometric distributions." *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences 2*, 59-69.

Sherbrooke, C.C. (1966). *Discrete compound Poisson processes and tables of the geometric Poisson distribution*. RAND Memorandum RM-4831-PR.

Shumway, R., Gurland, J. (1960a). "A fitting procedure for some generalized Poisson distributions." *Skandinavisk Aktuarietidskrift 43*, 87-108.

Shumway, C.C., Gurland, J. (1960b). "Fitting the Poisson binomial distribution." *Biometrics 16*, 522-533.

Simon, H.A. (1955). "On a class of skew distribution functions." *Biometrika 42*, 425-440.

Simon, H.A. (1960). "Some further notes on a class of skew distribution functions." *Information and Control 3*, 80-88.

Skalmowski, W. (1964). "A note on the distribution of Arabic verbal roots." *Folia Orientalia 6*, 97-100.

Skellam, J.G. (1952). "Studies in statistical ecology. I. Spatial pattern." *Biometrika 39*, 346-362.

Sprott, D.A. (1958). "The method of maximum likelihood applied to the Poisson binomial distribution." *Biometrics 14*, 97-106.

Tesitelová, M. (1972). "On the statistical choice of language material for the purposes of lexical analysis." *Prague Studies in Mathematical Linguistics 4*, 9-33.

Tuldava, J.A. (1974). "Ob izmerenii leksiceskoj svjazi tekstov ma urovne slovarja." In *Voprosy statisticeskoj stilistiki*. Kiev. 35-42.

Wilks, S.S. (1962). *Mathematical statistics*. New York: Wiley.

Williamson, E., Bretherton, M.H. (1964). "Tables of the logarithmic series distribution." *Annals of Mathematical Statistics 35*, 284-297.

Sachregister

Binomialverteilung 67f., 71, 74, 78, 82, 84, 144, 162
Binomial $\bigvee$ geometrische Verteilug 107-110
- Momente 110

Binomial $\bigvee$ logarithmische Verteilung 116-117
- Momente 117

Binomial $\bigvee$ Poisson-Verteilung 99-101
- Anfangsmomente 101
- Schätzung 101
- Rekursionsformel 7
- Zentralmomente 101

Faltung 70-73
Geometrische Verteilung 65, 69, 73, 161f., 174
Gestutzte negative Binomialverteilung 42
Hermitsche Verteilung 95
Inverse hypergeometrische V. 62
Inverse Pólya-Verteilung 32ff.
- faktorielle Momente 35f.
- WF 32-35

Konvergenz 84-85
Logarithmische Verteilung 41-62, 81, 144
- Anfangsmomente 45, 47, 60f.,
- Anpassung 49-53
- faktorielle Momente 46-47, 61
- MEF 44
- Schiefe und Exzess 49
- WF 41-44
- WFE 62
- Zentralmomente 48f.

Modifikation einer Verteilung 55
Modifizierte Binomialverteilung 55f.
Modifizierte geometrische Verteilung 159
Modifizierte negative Binomialverteilung 58

Modifizierte Poisson-Verteilung 56f., 59
Modifizierte logarithmische Verteilung
- Anfangsmomente 53
- Anpassung 54
- faktorielle Momente 61
- Zentralmomente 54
Negative Binomialverteilung 73, 78, 134, 144, 160, 182
Negative Binomial $\bigvee$ logarithmische Verteilung 142-143
- Momente 142
Negative hypergeometrische Verteilung
- Konvergenz 40
- Modus 40
- Momente 40
- Rekursionsformel 40
- Schätzung 40
Neyman-Verteilung 71-73, 76f., 83, 156
Null-Eins-Verteilung 82, 84, 157f., 160
Poisson-Verteilung 69, 70, 73, 74, 78, 80-82, 84, 144, 160-162
Poisson-Binomialverteilung 95, 156f.
Poisson $\bigvee$ logarithmische Verteilung 133-134
- Momente 134
- Schätzung 134
Poisson $\bigvee$ negative Binomialverteilung 121-129
- Momente 123f.
Poisson-Pascal-Verteilung 123
Pólya-Verteilung 1-40
- Anfangsmomente 12
- Anpassung 15-20
- Beziehung zu
  - B 21-23
  - HG 23
  - NB 26-30
  - NHG 24-25
  - diskrete Rechteckv. 25-26
- faktorielle Momente 10f.
- Modus 9

- Rekursionsformel 7
- Schiefe und Exzess 15
- WF 1-9
- Zentralmomente 13f.
Pólya-Aeppli-Verteilung 125-129
- Konvergenz 161
- Momente 126-129
Potenzreihenverteilungen 143-155
- Momente 149-155
- MEF 148
- Rekursionsformel 146f.
- WEF 148
Stirling-Verteilung erster Art 86
Stirling-Verteilung zweiter Art 162
Stirling-Zahlen der ersten Art 96
Verallgemeinerung 81, 88ff
Verallgemeinerte hypergeometrische Verteilung 164-167
- Konvergenz 182
- Momente 164, 166
Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion 63ff.
Waring-Verteilung 167-175
- Anpassung 171-173
- Konvergenz 174
- Momente 170
- Rekursionsformel 170
- Schätzung 171
Yule-Verteilung 175-181
- Anpassung 180f.
- Momente 177-179
- Rekursionsformel 176
- Schätzung 179
Zusammengesetzte Binomialverteilung 75, 89-116
Zusammengesetzte Binomial-geometrische-Verteilung 102-106
- faktorielle Momente 105
- Momente 103
Zusammengesetzte Binomial-logarithmische Verteilung 111-115

- Momente 112f., 115
Zusammengestezte Binomial-Poisson-Verteilung 94-99
Zusammengesetzte negative Binomialverteilung 135-143
Zusammengesetzte negative Binomial-logarithmische Verteilung 138-142
- Momente 139, 141
- WEF 139f.
Zusammengesetzte negative Binomial-negative Binomialverteilung 136-138
Zusammengesetzte Poissonverteilung 117-134
Zusammengesetzte Poisson-logarithmische Verteilung 130-133
- Momente 132f.
- WEF 131, 133
Zusammengesetzte Poisson-negative Binomialverteilung 119-121
- Momente 120f.